

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE ED ARTI  
IN NAPOLI

RENDICONTO  
DELL'ACCADEMIA  
DELLE  
SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XX. — (Anno XCII)

*gennaio - dicembre 1953*



NAPOLI  
STABILIMENTO TIPOGRAFICO GUGLIELMO GENOVESE  
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 22-568  
1953

Publicato il 26 febbraio 1954





SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE ED ARTI  
IN NAPOLI

---

RENDICONTO  
DELL' ACCADEMIA  
DELLE  
SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

---

SERIE IV — VOL. XX. — (Anno XCII).

*gennaio - dicembre 1953*



NAPOLI  
STABILIMENTO TIPOGRAFICO GUGLIELMO GENOVESE  
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 22-568  
1953





# RELAZIONE

SUI LAVORI COMPIUTI

DALL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

DURANTE L' ANNO 1952

letta nell' adunanza plenaria del dì 31 gennaio 1953

dal socio segretario **Geremia D' Erasmo**

---

Anche durante il 1952, come negli anni precedenti, l' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche ha esercitato attivamente la sua funzione di centro propulsore di cultura nelle provincie meridionali d' Italia pubblicando numerosi lavori di soci e di estranei nei campi più svariati delle scienze pure ed applicate. Un nuovo volume del Rendiconto — il XIX della serie 4<sup>a</sup>, ricco di circa 30 fogli di stampa, con numerose figure intercalate e diverse tavole fuori testo — è così venuto ad aggiungersi ai precedenti, dandoci buona testimonianza dell' attaccamento costante dei colleghi a questo vecchio e glorioso Sodalizio.

Ed iniziamo l' anno 1953 con la viva fiducia che ancor più notevole impulso alle pubblicazioni accademiche potrà derivare dall' annunziata concessione di un maggiore contributo finanziario da parte del Ministero della Pubblica Istruzione e dalla erogazione di un cospicuo assegno straordinario da parte della Commissione Interministeriale per i periodici di elevato valore culturale.

Cominciando la consueta breve rassegna dell' attività accademica dello scorso anno dai contributi astronomici, citerò anzitutto una nota del socio COLACEVICH, *Fotometria stellare a Capodimonte*, nella quale si descrive brevemente il fotometro fotoelettrico recentemente costruito per l' Osservatorio di Capodimonte ed applicato al rifrattore FRAUNHOFER di 17 cm. di apertura: fotometro, che permette di stabilire le grandezze delle stelle fino alla decima grandezza con la precisione di  $\pm 0,01$  grandezza nelle condizioni atmosferiche napoletane, e di fissare, quale programma di lavoro, l' osservazione sistematica di tutte le stelle variabili ad eclisse, o presunte tali, per le quali non vi siano curve di luce fotoelettriche.

Numerosi sono i contributi riguardanti le matematiche pure. Nel campo dell' analisi, una nota del dott. Guido STAMPACCHIA riguarda l' *Approssimazione di una funzione su di una superficie* e dimostra come si possa approssimare una funzione su di una assegnata superficie  $\Gamma$  mediante una

successione di polinomi in tre variabili. Il tipo di convergenza dipende dalla natura della funzione che si vuole approssimare, e la convergenza è assicurata nell'interno di  $\Gamma$  se questa è aperta, e su  $\Gamma$  se questa è una superficie chiusa. Le considerazioni esposte possono estendersi facilmente agli spazi a più dimensioni, riuscendo utili in varie equazioni di analisi.

In una nota *Su un'equazione differenziale della meccanica dei fili*, il dott. Francesco STOPPELLI generalizza in modo notevole un teorema di esistenza per l'integrale periodico di una equazione differenziale non lineare del secondo ordine, dato precedentemente da altro autore.

In altro lavoro *Sulla derivazione delle funzioni composte* il dott. Alberto SAMBO ha esteso un teorema di SCORZA DRAGONI, dando una proposizione relativa alla derivabilità asintotica di una funzione composta del tipo  $f(x, \alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))$ .

Ed in una nota *Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico nei domini non limitati* il dott. Giorgio PINI ha dimostrato il teorema di esistenza per il problema indicato nel titolo, imponendo alla soluzione di verificare in media le condizioni al contorno e all'infinito.

Anche nel campo delle discipline geometriche sono da segnalare lavori numerosi. Anzitutto tre note del socie SPAMPINATO, due delle quali rappresentano, come IX e X contributo, la continuazione di precedenti indagini riflettenti le *Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice  $n$  dell' $S_r$  proiettivo complesso*; mentre la terza riguarda l'*Estensione del teorema di Lüroth dall' $S_1$  complesso ad un  $S_1$  proiettivo ipercomplesso*, cioè legato ad una qualunque algebra  $A$ , di ordine  $m$ , dotata di modulo e commutativa.

Due note sono dovute al dott. Angelo FADINI. La prima, dal titolo *Un'interpretazione mediante algebre dei campi finiti di Galois di ordine  $p^n$* , dimostra che il campo finito di GALOIS di ordine  $p^n$ , con  $p$  numero primo, costituisce un'algebra equivalente all'algebra dei numeri  $n$  potenziali definita nel corpo numerico  $C[p]$ . La seconda riguarda lo *Studio di una trasformazione cremoniana dell' $S_3$  dedotta da una trasformazione quadratica dell' $S_2$  triduale*, e consente, partendo dalle equazioni di una trasformazione quadratica dell' $S_2$  triduale, di dedurre quelle di una trasformazione cremoniana dell' $S_3$  complesso; studia questa trasformazione determinandone gli spazi eccezionali e caratterizzando due sistemi lineari di ipersuperfici.

Nel medesimo campo di indagini sono da ricordare ancora una nota del dott. Pio BALSIMELLI, *Breve studio di una trasformazione birazionale dell' $S_3$  complesso determinata da una trasformazione quadratica biduale*, nella quale si introduce la trasformazione birazionale dedotta da una trasformazione quadratica biduale, si determinano i sistemi lineari di ipersuperficie ad essa legati e gli enti omologhi degli spazi fondamentali; un



lavoro della dott. Rita BRUNO, *Studio di una trasformazione cremoniana dell'  $S_8$  dedotta da una trasformazione quadratica dell'  $S_2$  tripotenziale*, con conseguente caratterizzazione di due sistemi lineari di ipersuperfici; e un altro della dott. Elda CIRILLO *Sulle rappresentazioni complesse dell'  $S_2$  tripotenziale*, nel quale si fa la prima rappresentazione dell'  $S_2$  tripotenziale, da questa si passa poi ad una seconda rappresentazione e si caratterizza una varietà da cui la Riemanniana dell'  $S_2$  tripotenziale si può ottenere per proiezione.

Ed altre due note spettano al dott. Giovanni ZACHER. Nella prima di esse si studiano alcune proprietà di cui godono gli *emimorfismi superiori ed inferiori tra reticoli*, di lunghezza finita; nella seconda si determinano *i gruppi d'ordine finito relativamente complementati*.

In una nota dal titolo *Compiuta ricerca dell'estremo inferiore di un particolare funzionale*, il dott. Ennio DE GIORGI si occupa della ricerca del minimo dell'integrale di una forma quadratica in  $x$  e  $x'$ , in un insieme di curve i cui estremi possono variare in due insiemi di punti chiusi e limitati qualunque. Si tratta di una ricerca nell'indirizzo classico del calcolo delle variazioni, che mostra come possano verificarsi circostanze particolari ed a priori imprevedibili, pervenendo a risultati generali di notevole interesse.

Ed in un lavoro dal titolo *Ricerca di una funzione armonica soggetta a condizioni al contorno non lineari*, il dott. Pietro LESKY riferisce sulle ricerche concernenti il calcolo della temperatura in un corpo conduttore del calore, in equilibrio termico, a forma di cilindro illimitato, nell'ipotesi che la temperatura non dipenda dall'ascissa del piede, su un asse parallelo alle generatrici del cilindro, di un piano normale a quest'asse e il coefficiente d'irraggiamento sia funzione della temperatura, conformemente a quanto hanno stabilito recenti esperienze. I risultati ottenuti nella particolare esperienza numerica del metodo adottato, esposti nella nota, fanno presumere la convergenza, in generale, del metodo, nonchè il teorema d'esistenza per il nuovo problema considerato.

Quattro lavori riguardano la scienza delle costruzioni.

Uno di essi, dovuto al dott. Aldo RAITHEL, tratta della *determinazione della frequenza fondamentale dei sistemi solidali*. Rilevate le difficoltà inerenti agli ordinari metodi di calcolo, l'autore espone un procedimento di iterazione per il calcolo della frequenza fondamentale dei sistemi solidali. A tal fine egli mostra come la deformata di una campata generica possa esprimersi sempre come somma di tre deformate particolari, di tipo sinusoidale, che permettono di eseguire con notevole semplicità le iterazioni successive, che si eseguono col metodo di CROSS e che porgono per la frequenza richiesta una successione di valori che converge verso quello effettivo.

Un'altra nota, del dott. Vincenzo FRANCIOSI, esamina il comportamento



statico, in funzione del tempo, delle *aste sottili pressoinflesse in regime viscoso*. In continuazione di precedenti ricerche, viene affrontato, in questo lavoro, il problema del comportamento statico di un' asta sottile presso-inflessa a caratteristiche ereditarie variabili con l'ascissa. Si perviene così, per la determinazione dei coefficienti dello sviluppo della deformata in serie di autofunzioni, ad un sistema di equazioni differenziali a coefficienti variabili; il sistema si riduce ad equazioni in una sola incognita non appena le caratteristiche ereditarie diventano costanti con l'ascissa.

Un terzo lavoro, del dott. Cesare MONTUORI, riguarda il *calcolo di progetto delle sezioni in cemento armato precompresso*. Vengono esaminate, in esso, sezioni a doppio *T* formate da elementi (anima ed ali) di piccolo spessore, e si ricavano formule, dalle quali, assegnati gli spessori, l'altezza e le sollecitazioni ammissibili, si ottengono direttamente le rimanenti caratteristiche.

La quarta nota, dovuta al dott. Ettore MINERVINI, esamina uno speciale *Apparecchio elettrico per la determinazione delle caratteristiche della sollecitazione dei telai iperstatici*. Questo lavoro rappresenta la realizzazione concreta di una teoria, esposta dal medesimo autore nel precedente volume del Rendiconto e che riguarda l'analogia tra le leggi della propagazione dei momenti flettenti nelle aste di un telaio e le leggi della propagazione della corrente elettrica in un particolare schema di circuiti. L'apparecchio elettrico ora descritto fornisce le caratteristiche della sollecitazione mediante misura diretta di intensità di corrente. Per uno schema di telaio assegnato, le rigidità delle singole aste sono rappresentate da resistenze elettriche, ed i carichi su di esse agenti da forze elettromotrici.

Alla continuazione di precedenti ricerche di chimica organica si riferisce la nota II del socio Luigi PANIZZI e del dott. Stefano CORSANO, *Sintesi nel campo delle sostanze steroidi*, destinata a descrivere l'ottenimento, a partire dall'estere  $\alpha$ -acetilglutarico, del 2-metil-2-carbetossi-5-metossicicloesano, intermedio per una sintesi di sostanze steroidi.

E pure alla prosecuzione di speciali indagini istologiche e fisiologiche, esposte in una precedente memoria dell'anno 1951, si riferisce la nota del socio Vincenzo DIAMARE e del dott. Antonio DE GIROLAMO *Ancora sul fegato grasso fisiologico nei Selaci*, la quale porta alla dimostrazione dell'esistenza di corpi mielinici ed esteri di colesterina nei fegati nani oligolipidici iperpigmentati, e di conseguenza giustifica l'interpretazione di considerare quello stato quale una reversibile degenerazione fisiologica.

Nel campo delle ricerche paleontologiche è da ricordare ancora una nota del socio Geremia D'ERASMO, dal titolo *Revisione degli ittioliti miocenici di Bra studiati da Oronzio Gabriele Costa*. Vengono, in essa, esaminati ex-novo i pesci fossili provenienti dalle argille marnose giallo-chiare e dalle



marne grigio-azzurrognole mioceniche dei dintorni di Bra in Piemonte, che erano stati oggetto di studio da parte di Oronzio Gabriele COSTA in due note del 1865 e del 1867; ne sono meglio precisati i caratteri, corrette le determinazioni e stabiliti i rapporti di coesistenza e di affinità con i rappresentanti delle altre ittiofaune coeve.

Anche nel 1952, come già negli anni precedenti, il decano fra i nostri soci ordinari, Giuseppe DE LORENZO, ha offerto al Rendiconto accademico alcuni nuovi contributi destinati a precisare ancora meglio la coincidenza fra le antiche intuizioni del mondo, indiane e mediterranee, con le nostre moderne concezioni europee. Così in una nota dal titolo *Instabilità ed inentità del mondo* egli ha esposto, in un efficace confronto, le due correnti parallele di pensiero che si svolsero, a cominciare da un millennio prima di Cristo, in India con le concezioni religiose e filosofiche brâhmaniche, buddistiche, giainistiche e hinduistiche, e nel Mediterraneo con le filosofie presocratiche, platoniche, aristoteliche, stoiche, epicuree e neoplatoniche, facendo rilevare come esista tuttavia una differenza fondamentale tra l'intuizione indiana, fondata sopra una base unitaria eticometafisica, e le concezioni occidentali, che distinguono sempre la legge morale dalla legge fisica del mondo.

E in un secondo lavoro dal titolo *Concezioni cosmiche di Leopardi*, riprendendo l'argomento, ha voluto specificare, più particolareggiatamente, quali siano state le concezioni cosmologiche, antropologiche, psicologiche ed etiche di questo grande pensatore e sommo poeta, illustrandone i brani più importanti e meno noti sulla natura, l'origine e la fine del mondo.

Oltre a tutte le note testè elencate e alla prescritta relazione annuale del segretario sull'attività accademica dell'anno precedente, il Rendiconto del 1952 ha pubblicato, insieme col ritratto e con l'elenco delle pubblicazioni, l'efficace e commossa *Commemorazione del socio corrispondente Giovan Battista Rizzo* tenuta nello scorso marzo dal collega Giuseppe IMBÒ, ed ha altresì data succinta notizia delle brevi comunicazioni verbali con cui alcuni consoci vollero precisare la loro opinione in dibattute controverse scientifiche o fornire le prime informazioni su pubblicazioni di interesse internazionale in via di preparazione.

Così, ad esempio, il socio NOBILE, esponendo il contenuto di un suo recente scritto sopra *Il conflitto fra copernicisti e aristotelici nella sua essenza e nel pensiero di Galileo*, ha segnalato gli errori e le confusioni correnti sulla famosa controversia cosmologica aperta da Galileo, con una opportuna e diffusa precisazione del senso che si deve attribuire presentemente al complesso dei problemi galileiani dopo la trasformazione che i medesimi subiscono con l'avvento della dinamica newtoniana.

D'altra parte, il socio COLAMONICO, illustrando la relazione da lui

presentata al XVII Congresso Internazionale di Geografia di Washington, ha spiegato l'origine e gli scopi di una *Carta agraria e forestale d'Italia* alla scala di 1:200.000, di cui si è testè iniziata la preparazione e che servirà di base per una carta della utilizzazione del suolo alla scala di 1:1.000.000, che l'Unione Geografica Internazionale intende costruire per tutta la terra.

Come di consueto, il nostro Sodalizio non ha mancato di partecipare alle più importanti manifestazioni culturali e si è associato alle celebrazioni commemorative promosse da Accademie consorelle, quale ad esempio la gloriosa Accademia Leopoldina di Halle (*Deutsche Akademie der Naturforscher*) che nello scorso febbraio ha festeggiato il tricentenario della sua fondazione.

Chiuso, col 31 ottobre 1952, il primo concorso post-bellico al premio biennale accademico 1951-52 di lire 50.000 sul tema « *Contributo alla mineralogia vulcanica della Campania* » e giudicato pienamente meritevole del premio l'unico lavoro dattiloscritto presentato al concorso e distinto dal motto « *Campania felix* » <sup>1)</sup>, è stato dato incarico alla Sezione di Scienze matematiche di proporre il tema per il secondo concorso al premio biennale di lire 50.000 per gli anni 1953-54 <sup>2)</sup>.

Per completare la mia breve e scheletrica relazione sull'attività accademica del decorso anno 1952, mi incombe ancora l'obbligo di accennare alle variazioni verificatesi nella compagine dei Soci.

Due gravi perdite abbiamo dovuto lamentare, dopo quelle di cui venne data notizia nelle precedenti relazioni. La prima di esse, avvenuta sul finire del 1951 e comunicataci con notevole ritardo, ci strappò il decano dei nostri soci corrispondenti, il prof. Enrico PANTANELLI, che apparteneva alla Sezione di scienze naturali da più di un trentennio ed aveva pubblicato nel Rendiconto accademico molteplici lavori nel periodo 1914-1930. Tecnico di larga esperienza, Egli fu per 8 anni ispettore al Ministero d'Agricoltura, per un ventennio direttore della Stazione Agraria sperimentale di Bari, e quindi per un decennio professore di Agronomia generale e coltivazioni erbacee in quella Università. Aveva partecipato all'esplorazione scientifica ed economica della Libia ed aveva studiato i problemi della colonizzazione

---

<sup>1)</sup> Aperta, secondo le norme del Regolamento di detto premio, la busta suggellata contenente la scheda col nome dell'Autore nell'adunanza plenaria del dì 31 gennaio 1953, è risultato autore del lavoro premiato il prof. Antonio PARASCANDOLA.

<sup>2)</sup> Nell'adunanza 3 gennaio 1953 l'Accademia, accogliendo la proposta della Sezione di Scienze matematiche, deliberava di bandire il nuovo concorso a premio sul tema « *Contributo allo studio dei gruppi o delle algebre dal punto di vista della teoria dei reticoli* », fissandone la scadenza al 30 ottobre 1954.



della Cirenaica, contribuendo poi specialmente ai progetti di trasformazione agraria del Tavoliere. Lascia una cospicua e varia produzione scientifica, rivolta negli anni giovanili soprattutto al campo della fisiologia e della patologia vegetale, e più tardi all'agronomia sperimentale, alla chimica agraria e alla bonifica integrale di vaste plaghe del Mezzogiorno e specialmente della Puglia. Ma lascia altresì caro ricordo e vivo rimpianto in quanti ebbero con Lui consuetudini di rapporti, che portavano invariabilmente, per la nobiltà del Suo carattere, a legami di stima profonda e di amicizia sincera.

L'altra scomparsa, avvenuta quasi fulmineamente nello scorso settembre mentre era andato nel nativo Abruzzo a trascorrervi un periodo di riposo estivo, riguarda il nostro consocio Alberto DE DOMINICIS, che apparteneva alla stessa Sezione di Scienze naturali dal 1938 quale corrispondente e dal 1942 quale ordinario residente. Anch'egli fu cultore'esimio di chimica agraria, che aveva cominciato a coltivare a Portici dal 1910 come assistente del prof. Celso ULPANI e nella quale doveva diventare poi maestro provetto in qualità di direttore dello stesso Istituto e della Stazione chimico-agraria sperimentale. La sua attività scientifica si è affermata più particolarmente nello studio del suolo meridionale, con pregevoli ricerche sull'alcalinità del terreno, sulle relazioni fra acqua e struttura delle argille, sull'origine e formazione della crosta calcarea pugliese. Di temperamento vivace, di tenacia non comune, di sentimenti intransigenti ed altruistici, difese ed appoggiò incondizionatamente i suoi allievi, parecchi dei quali sono già titolari di cattedre universitarie.

Per colmare i vuoti, che la morte o il trasferimento di qualche collega in altra provincia ha determinato nelle diverse categorie sociali, l'Accademia ha proceduto, nel 1952, ad alcune elezioni.

Il prof. Adriano GALLI, ordinario di Scienza delle costruzioni nella Facoltà di Ingegneria di Napoli, fu nominato socio ordinario residente nella sezione di Scienze matematiche, e il prof. Ferdinando MILONE, ordinario di geografia economica nell'Università di Roma, venne eletto socio ordinario non residente nella sezione di Scienze naturali. Entrambi appartenevano già alla nostra Accademia in qualità di soci corrispondenti. Vennero poi ad accrescere le nostre file il dott. Camillo ARAMBOURG, professore di Paleontologia al Museo Nazionale di Storia Naturale di Parigi, in qualità di socio straniero nella Sezione di Scienze naturali, e il prof. Mario COVELLO, ordinario di Chimica farmaceutica nel nostro Ateneo, in qualità di corrispondente della medesima Sezione.

A vice-presidente dell'Accademia per il 1953 è stato chiamato il socio Carmelo COLAMONICO, e quale segretario per il triennio 1953-55 è stato confermato il socio Geremia D'ERASMO. Ecco perchè ancora una volta, per antica e continuata benevolenza di colleghi e non certo per particolari benemerenze o attitudini personali, voi, o amici e consoci delle varie Classi

della nostra Società di Scienze, Lettere ed Arti, rivedete a questo posto, ormai per la ventiduesima volta, il vecchio segretario, che, pur infliggendovi il tormento di questa monotona e disadorna relazione annua, sente tuttavia di adempiere con essa non solo ad un precipuo dovere del suo ufficio, ma di soddisfare ancor più un sentimento di devoto attaccamento e di filiale gratitudine verso quest' *alma mater studiorum* che per lui, e non soltanto per lui, è l'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli.

---

#### CONCORSO AL PREMIO BIENNALE ACCADEMICO PER GLI ANNI 1953-1954

L'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli bandisce il concorso al premio biennale accademico per gli anni 1953-1954.

Il premio, di L. 50.000, sarà assegnato all'autore della migliore memoria sul tema « *Contributo allo studio dei gruppi o delle algebre dal punto di vista della teoria dei reticoli* ».

Al concorso possono partecipare soltanto i cittadini italiani, esclusi i soci della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli.

Le memorie devono essere scritte in lingua italiana e pervenire alla Segreteria dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, nella sede di questa (via Mezzocannone, 8), entro le ore 12 del dì 30 ottobre 1954.

Ciascuna memoria non porterà il nome dell'autore, ma sarà distinta con un motto, il quale dovrà essere ripetuto sopra una busta suggellata, che conterrà la scheda recante il nome dell'autore.

Le buste della memoria premiata e di quelle che avranno ottenuto lo *accessit* saranno aperte nell'adunanza plenaria del gennaio 1955 della Società Nazionale delle Scienze, Lettere ed Arti in Napoli.

Tutte le memorie presentate al concorso saranno conservate nell'archivio dell'Accademia banditrice.

Napoli, 3 gennaio 1953.

*Il Segretario*  
GEREMIA D'ERASMO

*Il Presidente*  
UMBERTO PIERANTONI

## SCIENZA D' OCCIDENTE E SAPIENZA D' ORIENTE

*Nota del socio ordinario Giuseppe De Lorenzo*

(Adunanza del dì 4 aprile 1953)

**Sunto.** — In questa nota continuo, ancora una volta, ad esporre le congruenze e le simiglianze, già indicate nelle mie note precedenti, tra i grandi e precisi risultati della moderna scienza d' Occidente e le profonde e geniali intuizioni, se anche vaghe, dell' antica sapienza d' Oriente.

Chiedo venia, ancora una volta, ai colleghi, se, ultraottuagenario, quale ora io sono, non potendo più occuparmi attivamente di geologia e di geografia fisica, continuo a comunicare le mie divagazioni sui risultati, da me ottenuti, nello studio delle dottrine e delle opere di antichi e moderni grandi pensatori: convinto, come sono, che, oltre le nostre, attuali esperienze, anche le conoscenze dei nostri predecessori contribuiscano ad accrescere il patrimonio, come direbbe BACONE, *de augmentis scientiarum*. Il fondo di tali mie divagazioni è sempre dato, oltre che dalle moderne scienze e filosofie, dalle antiche concezioni cosmiche ed etiche dell' India, e più specialmente del Buddhismo, e più propriamente ancora del Buddhismo antico, originario, qual' è contenuto nei testi pàli del *Hīnayāna*, esposto dal suo fondatore GOTAMO BUDDHO, nel sesto secolo avanti Cristo, e vivente ed operante ancor oggi nell' isola di Ceylon, nella Birmania, nel Siam, nel Laos e nel Cambogia: prescindendo dalle estreme conseguenze dianoilogiche, ad esso apportate, nel primo secolo dopo Cristo, dal filosofo NAGARJUNA, e dalle trascendenze metafisiche del *Mahāyāna*, qual' è oggi praticato nel Nepal, nel Tibet, nella Mongolia, nella Cina, nella Corea e nel Giappone; conseguenze e trascendenze, sotto il cui velo intravidero il Buddhismo gli studiosi ed i pensatori della fine del settecento e del principio dell' ottocento; fino a quando, nella seconda metà dell' ottocento, furono conosciuti i testi pàli, che rivelarono all' Occidente l' originario, antico Buddhismo indiano.

Questo Buddhismo antico dei testi pàli è tale, che molti sono in dubbio se definirlo una filosofia piuttosto che una religione. Quel violento pensatore, che fu il NIETZSCHE, riprendendo le *divinazioni* del suo primo, benchè poi rinnegato, maestro SCHOPENHAUER, nelle sue due ultime opere, l' *Anti-cristo* e l' *Ecce Homo*, del 1888, scriveva, che il Buddhismo è più un' igiene che una religione, e che quindi il suo fondatore ben meritava il titolo di *grande medico, grande chirurgo*, datogli dai suoi seguaci; ed aggiungeva:



che il Buddismo è l'unica religione propriamente *positivistica*, che la storia ci mostri, anche nella sua teoria della conoscenza, che è un rigoroso fenomenalismo. Esso non dice più « lotta contro il peccato »; ma, dando interamente diritto alla realtà: « lotta contro il dolore ». Così scriveva NIETZSCHE, prima che stesse nell' « ombra senza mutamento, immoto, vacuo, taciturno, come un cratere spento ».

Quasi come una reminiscenza di queste parole di NIETZSCHE suonano quelle dello scrittore inglese, nostro contemporaneo, e di tutt'altro indirizzo mentale, Aldous HUXLEY; il quale nel suo recente libro, *The Perennial Philosophy*, London, 1946, ha scritto che il BUDDHA dei testi pâli è un Maestro, di cui la ripugnanza per le questioni infondate è non meno intensa di quella del più rigoroso fisico del secolo ventesimo: *the Buddha of the Pâli scriptures, a Teacher whose dislike of footless questions is no less intense than that of the severest physicist of the twentieth century*. Del resto, Aldous HUXLEY è nipote del grande biologo, seguace, amico e collaboratore di DARWIN nel fondare la teoria dell'evoluzione, Thomas HUXLEY, e può aver appreso da quello la sua attuale cognizione del BUDDHA e dei testi pâli.

Perchè Thomas HUXLEY, con una cultura umanistica molto più vasta di quella di DARWIN, nel 1893, due anni prima della sua morte, tenne una *Romanes Lecture*, nello Sheldonian Theatre di Londra, su *Evolution and Ethics*: un vero gioiello per vastità e profondità di sapere e per bellezza di stile; nella quale volle appunto dimostrare la filosoficità e la scientificità della dottrina buddhistica, qual'è esposta nei testi pâli. Una dottrina, egli disse, che non conosce un Dio nel senso occidentale; che nega l'anima all'uomo; che ritiene l'immortalità dell'anima un errore, ed il credervi una colpa; che non crede in alcuna efficacia della preghiera e del sacrificio; che esorta gli uomini a non credere ad altro che alle proprie forze, per salvarsi; che, nella sua originaria purezza, non conobbe voti di ubbidienza, abborrì l'intolleranza e non cercò mai l'aiuto di un braccio secolare; e, ciò non pertanto, si diffuse con meravigliosa rapidità sulla metà del mondo antico, ed ancor oggi, dopo due millenni e mezzo, forma la base della civiltà di più di un terzo del genere umano. Tale dottrina, a simiglianza di quella esposta da ERACLITO agli antichi Greci, non vedeva nel mondo infinito che un continuo fluire nello spazio e nel tempo, senza principio nè fine, quale un costituente essenziale del processo cosmico. L'energico antico Greco poteva trovare una fiera gioia in tale mondo, in cui la guerra è la legge; ma il cognato spirito dell'antico Arya fu domato dalla dottrina del grande Saggio dell'India; per il quale la vita è tutt'una col dolore, ed il dolore con la vita. E, se anche la vita fosse un sogno, sarebbe meglio sognare di non voler più sognare, e così mettere fine all'angoscioso sogno della vita con l'estinzione del nirvâna: *'tis a consummation devoutly to be wish'd*. E, se anche non si sia d'accordo

sulla vera essenza dell'estinzione del nirvâna: pure, giacchè gli antichi testi concòrdetemente ci dicono, che per il saggio, che vi è pervenuto, non v'è più sete di vita nè possibilità di riapparizione fenomenica, si possono, anche per quest'acme della filosofia buddhistica, ripetere le ultime parole di Amleto morente: *the rest is silence*.

Thomas HUXLEY aveva tratto le sue cognizioni sulla filosofia buddhistica dalle opere dei suoi contemporanei, maggiori studiosi dei testi pâli, l'inglese T. W. RHYS DAVIDS e il tedesco Hermann OLDENBERG: il quale ultimo, nel suo classico libro, *Buddha*, che ha meritamente avuto tante traduzioni ed edizioni, anche dopo la morte dell'autore, nel 1920, aveva appunto scritto, che l'India aveva creato, nel Buddhismo, una dottrina, che è insieme religione e filosofia o, appunto perciò, se si vuole, nè l'una nè l'altra. Nella prima parte di questa osservazione il HUXLEY si sarebbe anche più cònfermato, se, vivendo ancora, avesse potuto conoscere le opere dei maggiori continuatori di quei due pionieri: la monumentale opera di traduzione e di commento, in tedesco, dei più importanti dei testi pâli del Buddhismo, compiuta da Karl Eugen NEUMANN dal 1890 al 1915, quando, appena cinquantenne, morì; e gli scritti del maggiore studioso vivente in tale campo, il prof. Helmuth von GLASENAPP: specialmente i suoi bei volumi su *Brahma und Buddha*, Berlin 1926; *Der Buddhismus*, Berlin 1936; *Die Weisheit des Buddha*, Baden 1946; *Die Philosophie der Inder*, Stuttgart 1949, ed altri ancora. Nè si può dimenticare un altro valente studioso, americano, Henry Clarke WARREN, morto anch'egli giovane, lasciandoci in eredità il suo magnifico volume *Buddhism in translations*, Cambridge Mass., 1896.

A questi profondi studiosi teorici del Buddhismo hinayânico bisogna aggiungere alcuni spiriti ascetici; i quali lo hanno non solo studiato, ma anche *vissuto*. Ne cito due esempi. Un giovane fisico inglese, Allan BENNET MC GREGOR, al principio di questo secolo si fece monaco buddhista ad Akyab e visse come tale a Mandalay ed a Rangoon, pubblicando vari scritti buddhistici. Durante gli anni della grande guerra ritornò a Londra, per ragioni di salute, e vi tenne alcune conferenze sul Buddhismo, che poi furono pubblicate in un volume, *The Wisdom of the Aryas*, London 1923; nelle quali espose l'antica dottrina buddhistica indiana con gli argomenti ed i chiarimenti della moderna scienza fisica e biologica del nostro Occidente. Ed uno studioso tedesco di filosofia, ordinatosi anch'egli monaco buddhista nell'isola di Ceylon, dove tuttora vive ed è noto come *mahathera*, o venerabile, NYANATILOKA, ci ha donato parecchi scritti; tra cui una grande traduzione tedesca dell'*Angûttaranikâyo*, München, 1922-23, ed un volumetto, *The Word of the Buddha*, Colombo 1928, nel quale ha riassunto le sue conoscenze ed esperienze della dottrina buddhistica.

Tutti costoro, ed altri ancora, che, per non dilungarmi troppo, taccio, hanno contribuito a mettere in chiara luce il carattere filosofico e scien-

tifico dell' antica dottrina buddhistica; la quale, come grande filosofia, ha una base teoretica, di conoscenza, ed un' applicazione pratica, od etica: così come la filosofia di KANT ha una *Critica della ragion pura* ed una *Critica della ragion pratica*.

Nella sua parte teoretica la filosofia buddhistica cerca di comprendere il mondo con un criterio di idealismo transcendente, qual' è quello moderno di KANT e di SCHOPENHAUER, e di realismo empirico, come fu esposto da BACONE in *De augmentis scientiarum*: Ea demum vera est philosophia, quae mundi ipsius voces fidelissime reddit, et veluti dictante mundo conscripta est, et nihil aliud est, quam ejusdem simulacrum et reflectio. In questo simulacro del mondo la filosofia buddhistica scorge anzitutto quelle, che KANT chiama forme pure della intuizione sensibile, come principii della conoscenza *a priori*: cioè l' infinità del tempo e dello spazio.

Queste concezioni dell' eternità del tempo e dell' infinità dello spazio sono espresse sotto forme di paragoni e di parabole, con le relative applicazioni morali. Per l' eternità del tempo ripeto il grandioso paragone geologico, già da me altra volta riportato, del libro XV del *Samyuttanikâyo*: « Così come quasi, o mendicanti, se vi fosse una montagna di roccia compatta, lunga una lega, larga una lega ed alta una lega, senza fratture, spaccature o caverne, ed ogni cento anni venisse un uomo e la fregasse per un attimo con una pezza di seta; quella grande montagna di roccia si consumerebbe, perciò, più presto di un ciclo del mondo; tale è la lunga durata di un ciclo mondiale. E molti di tali cicli hanno girato, molte centinaia di cicli, molte centinaia di migliaia di cicli. Perchè senza conoscibile principio nè fine è il giro dell' esistenza universale (*samsâro*), lungo il quale gli esseri, ciechi per ignoranza e tratti dalla sete del divenire, passano, attraverso l' agitazione delle forme e dei fenomeni, da morte a vita e da vita a morte, per infinita catena di dolori. Abbastanza lungamente, invero, per essere insoddisfatti di ogni modo di esistenza, per potersene redimere, per potersene salvare ». Analogamente, nello stesso libro del *Samyuttanikâyo* e nel nono libro dell' *Anguttaranikâyo*, viene descritta l' infinità dello spazio: « Se vi fossero quattro uomini, che camminassero verso i quattro punti cardinali, con passi così lunghi come la distanza dall' oceano orientale all' occidentale, e con la velocità di una freccia scoccata da un forte arciere, e procedessero instancabilmente, senza bere, senza mangiare, senza fare i propri bisogni, senza dormire e senza fermarsi; essi non raggiungerebbero mai la fine del mondo, perchè senza fine è il mondo. Ma non si può mettere fine al dolore, se non si raggiunge la fine del mondo ». E qui, a questa sconsolante conclusione del realismo empirico sovviene l' illuminazione dell' idealismo transcendente, che il Maestro accende ai discepoli: « Ma io vi dico, che in questo nostro corpo, alto otto spanne, dotato di coscienza e di pensiero, è contenuto il mondo,



l'origine del mondo e la fine del mondo ». Alla prima parte di questa rappresentazione della eternità ed infinità del mondo, com'è espressa nei testi buddhistici pâli, può fare da commento scientifico moderno il *Canto notturno di un pastore errante dell'Asia* di LEOPARDI:

E quando miro in cielo arder le stelle;  
Dico fra me pensando:  
A che tante facelle?  
Che fa l'aria infinita, e quel profondo  
Infinito seren? che vuol dir questa  
Solitudine immensa? ed io che sono?  
Così meco ragiono: e della stanza  
Smisurata e superba,  
E dell'innumerabile famiglia;  
Poi di tanto adoprare, di tanti moti  
D'ogni celeste, ogni terrena cosa,  
Girando senza posa,  
Per tornar sempre là donde son mosse;  
Uso alcuno, alcun frutto  
Indovinar non so.

E la seconda parte può esserci illustrata da quel che ci ha lasciato scritto KANT nella sua *Kritik der Urtheilskraft*, dove dice, che l'infinità e la sublimità non sono contenute in alcuna cosa della natura, ma solo nel nostro spirito, in quanto possiamo divenir consci, di essere superiori alla natura in noi, ed anche alla natura fuori di noi, per quanto influisce su noi. Perchè l'uomo, come l'unico essere sulla terra, che ha ragione, e quindi un potere, di porsi scopi volontari, può chiamarsi signore della natura e divenire ultimo fine del mondo, purchè abbia la volontà di dare ad esso ed a sè stesso tale scopo finale. E questo è appunto ciò, che la dottrina buddhistica indica come estinzione del nirvâna.

Ma, ritornando alla conoscenza realista empirica del mondo, la filosofia buddhistica vede in esso tre caratteri fondamentali, che WARREN chiama le tre caratteristiche e Allan BENNET, ripristinando un vocabolo latino coniato da PARACELSO, i tre *signata*, od i tre segni o stampi del mondo, e cioè: l'impermanenza, la transitorietà, l'instabilità, *anicca*; la inessenzialità, l'inertità, l'inanimità, *anattâ*; e l'irritabilità, l'ecceitabilità, la dolorosità, *dukkha*. Questi sono i tre costituenti fondamentali del mondo, che noi possiamo empiricamente e realisticamente constatare.

La concezione dell'*anattâ*, o mancanza di un'anima, di un Io, di un sè, coincide perfettamente con quel che scrisse David HUME, nel 1739, nel suo *Treatise on Human Nature*, e con quanto ha scritto, nel 1911, Ernst MACH nella *Analyse der Empfindungen*, sulla fugacità e mutabilità

dei sentimenti e dei pensieri, più rapida ancora della transitorietà dei corpi: come la successione condizionale dei fattori d'esistenza, *dharma* e *sanskâra*, mediante l'origine condizionata, *patīccasamuppāda*, trova esatto riscontro nell'opera recente di M. VERWORN, *Kausale und konditionelle Weltanschauung*; di cui il condizionismo, invece del causalismo, corrisponde perfettamente ai principii della filosofia buddhistica.

Col terzo carattere, o stampo, del mondo, il dolore, *dukkha*, si passa dal campo della conoscenza teoretica a quello dell'applicazione pratica della dottrina buddhistica; la quale gira tutta e sempre sul cardine fondamentale del dolore del mondo. Ogni volta, infatti, che il fondatore della Dottrina, il BUDDHA SAKYAMUNI, è invitato dai suoi interlocutori ad entrare in discussione su campi metafisici, che transcendano quanto ragione umana vede, egli immancabilmente li riporta alla esposizione e comprensione delle quattro, immanenti, nobili verità del dolore del mondo. E, quando altri asceti e sacerdoti lo accusano, di essere un distruttore della vita, egli risponde: «Ciò che io non sono, o discepoli, e che non dico, di ciò mi accusano quei signori asceti e sacerdoti, senza ragione, vanamente, falsamente, a torto, dicendo: Un distruttore è l'asceta G o t a m o; egli annunzia distruzione, annientamento, rinnegamento della vita. Solo una cosa, o discepoli, io annunzio, oggi come sempre, il dolore e l'estinzione del dolore». E questo annunzio del dolore è condensato nelle quattro sante o nobili verità, *cattâri ariyasaccâni*: del dolore, dell'origine del dolore, della fine del dolore, della via per la fine del dolore del mondo. Esse sono la base solidissima di tutta la filosofia o religione buddhistica. Eccole, nel loro testo.

« Questa, o discepoli, è la nobile verità del dolore: nascita è dolore, vecchiezza è dolore, malattia è dolore, morte è dolore, essere uniti con quel che non si ama è dolore, essere separati da quel che si ama è dolore, non ottenere quel che si brama è dolore; in breve, i cinque oggetti del l'attaccamento, alle forme, alle sensazioni, alle percezioni, alle concezioni alla coscienza, sono dolore. Questo è il dolore.

« Questa è la nobile verità dell'origine del dolore: è la sete (*tanhâ*), seminante resistenza, legata a brama di soddisfazione, qua e là appagantesi; la sete del sesso, la sete dell'essere, la sete del benessere. Questa è l'origine del dolore.

« Questa è la nobile verità dell'annientamento del dolore: è la completa, totale annichilazione, repulsione, espulsione, distruzione di tale sete appunto. Questo è l'annientamento del dolore ».

« Questa è la nobile verità della via per l'annientamento del dolore: è la nobile, ottuplice via, che mena alla fine del dolore, cioè: retta cognizione, retta intenzione, retta parola, retta azione, retta vita, retto sforzo, retto sapere, retto raccoglimento. Questa è la via per la fine del dolore ».

Queste quattro verità del dolore del mondo sono così evidenti ed im-



manenti, che hanno trovato grandi voci concordi in tutti i tempi ed in tutti i luoghi. Della prima di esse cantore eccelso è LEOPARDI, quasi con le stesse parole:

Indi varia, infinita una famiglia  
Di mali immedicabili e di pene  
Preme il fragil mortale, a perir fatto  
irreparabilmente. . . . .  
. . . . . vecchiezza e morte,  
Ch' han principio d' allor che il labbro infante  
Preme il tenero sen che vita instilla.

Della seconda, cioè della sete, origine del dolore, la sete della vita, la sete dell' esistenza, la sete del divenire, si trova l' espressione identica nel terzo libro *de rerum natura* di LUCREZIO: *et sitis aequa tenet vitae semper hiantis*. E l' eco se ne riverbera nell' applicazione, che ORAZIO, nella sua prima satira, fa della sete di Tantalo al genere umano:

Tantalus a labris sitiens fugentia captat  
Pocula: quid rides? mutato nomine de te  
Fabula narratur.

A cui si può aggiungere la spiegazione umana, data da FEDRO, appendix 5, al mito di Sisifo:

Adversus altos Sisyphus montes agens  
Saxum labore summo, quod de vertice  
Sudore semper irritò revolvitur,  
Ostendit hominum sine fine esse miserias.

Questa sete di Tantalo, la *sitis vitae* di LUCREZIO, la *tanhâ* o sete d' esistenza del Buddismo, non sono che il *Wille*, o volontà di vita, con cui SCHOPENHAUER ha identificato l' inconoscibile Cosa in sè, *Ding an sich*, di KANT. Il riconoscere tale sete quale origine del dolore del mondo è la necessaria premessa, per potersi appunto affrancare dal dolore stesso: com' è detto nella terza e nella quarta nobile verità del dolore. « Come del sorgere del sole » è detto nell' *Angûttaranikâyo*, X, 121 « l' aurora è l' annunziatrice, l' aurora è la rivelatrice, così della via della redenzione la retta cognizione è l' annunziatrice, la retta cognizione è la rivelatrice » E la retta conoscenza, infatti, è la prima orma della via ottopartita, che mena all' annientamento del dolore, la via dell' ascesi e della santità, che mena all' estinzione del nirvâna: com' è esposta nella terza e quarta nobile verità del dolore. E pare, come se DANTE avesse avuto una intuizione dell' origine indiana di tale dottrina di redenzione, quando, nel cantare

l'ascesi e la santità di San FRANCESCO d'Assisi, disse, che

. . . nacque al mondo un sole  
Come fa questo talvolta di Gange:  
Però chi d'esso loco fa parole  
Non dica Ascesi, che direbbe corto,  
Ma Oriente, se proprio dir vuole.

Perchè il Cristianesimo ed il Buddhismo sono le sole religioni dell'umanità, le quali, al disopra della terza religione universale, dell'Islamismo, e delle altre particolari, razziali o nazionali, dell'antico Egitto, della Mesopotamia, della Palestina, dell'Iran, dell'India, della Cina, del Giappone, della Germania, dell'antica Grecia e di Roma, hanno raggiunto tali alti fastigi di ascetismo e di santità. Con questa differenza, già altrove da me indicata, che il Cristianesimo è tutto fondato sul *Credo* in un unico, personale Dio padre onnipotente, creatore del cielo e della terra, ed in Gesù Cristo, suo unico figlio, nostro redentore, con la grazia dello Spirito Santo, e nostro giudice, nel dì del Giudizio, quando la nostra anima immortale, creata dal nulla e rivestita di corpo per breve tempo sulla terra, risusciterà in carne, per essere eternamente dannata o beatificata, nell'inferno od in paradiso; mentre il Buddhismo prescinde da tutto ciò ed ammette solo la responsabilità individuale di ogni essere, di cui la nascita, o rinascita, nell'infinito giro dell'esistenza universale, è prodotta dalla sete della vita, *tanhâ*, e condizionata dall'azione, *karma*, in pensieri, parole ed opere, secondo la ferrea legge cosmica: *esse sequitur operari*.

Però, non mancano nel nostro Occidente, e specialmente nell'antichità di Grecia e di Roma, concezioni della vita e del mondo, le quali presentano analogie, sia per la conoscenza teoretica che per l'applicazione etica, col Cristianesimo e col Buddhismo. Basti ricordare l'*ἀπάθεια* della Stoa e l'*ἀταραξία* di EPICURO, con i loro grandiosi sviluppi in Roma, dal primo secolo avanti Cristo al secondo secolo dopo Cristo. Lo Stoicismo di SENECA quasi si amalgamò col Cristianesimo di San PAOLO, come ci testimonia San GIROLAMO e Sant'AGOSTINO. E SENECA stesso, nella nona del primo libro delle sue epistole, dà la più esatta e più concisa spiegazione delle simiglianze e delle differenze tra lo Stoicismo e l'Epicureismo: « Hoc inter nos, Stoicos, et illos, Epicureos, interest: noster sapiens vincit quidem incommodum omne, sed sentit; illorum ne sentit quidem. Illud nobis et illis commune est, sapientem se ipso esse contentum. Sed tamen et amicum habere vult et vicinum et contubernalem, quamvis ipse sufficiat ». E la fusione dello Stoicismo con l'Epicureismo s'incarnò poi in quell'unica e mirabile figura di santo filosofo sul trono, che fu l'imperatore MARCO AURELIO.

L'Epicureismo, da solo, diede origine alla grandiosa opera di LUCRE-



ZIO, per la quale Auguste DUPOUY, nel suo libro *Rome et les lettres latines*, Paris 1924, ha potuto scrivere: « La philosophie de LUCRÉCE est jusqu' au bout une doctrine de la désillusion et du détachement... C' est une sorte de bouddhisme romain, avec anéantissement dans un Nirvâna ». Del resto l'importanza e la finalità dell' opera di LUCREZIO erano state già riconosciute dai suoi contemporanei e dagli immediati epigoni. Valgano, per tutti, CICERONE, che ne curò l' edizione; OVIDIO, che in *Amores*, I, 15, scrisse:

Carmina sublimis tunc sunt peritura Lucreti,  
exitio terras com dabit una dies.

E VIRGILIO, che nel secondo libro della *Georgiche* cantò l' uomo e l' opera con alate parole, riferendosi anche al maestro di lui, EPICURO:

Felix, qui potuit rerum cognoscere causas,  
atque metus omnes et inesorabilem fatum  
subiecit pèdibus, strepitumque Acherontis avari!

Queste parole, come ha fatto notare il grande indologo Eugène BURNOURF nelle sue opere, *Introduction à l'histoire du Bouddhisme indien*, Paris 1844, e *Le Lotus de la bonne Loi*, Paris 1852, corrispondono esattamente a quelle, che durante due millenni e mezzo sono state incise sotto le statue del BUDDHA SAKYAMUNI: « Di tutte le cose originate da cause il Compiuto dice la causa — e la loro estinzione anche dice il grande Asceta: *ye dharma hêtuprabavâh têsan hetum Tathâgata uvâca — têsan ca yô nirodha evamvadî mahâsramanah.* »

RADIAZIONE SOLARE DIRETTA, GLOBALE E DIFFUSA A NAPOLI,  
IN OCCASIONE DELL' ECLISSE SOLARE DEL 25 FEBBRAIO 1952

*Nota del dott. Pio Vittozzi, presentata dal socio G. Imbò*

(Adunanza del dì 7 febbraio 1953)

**Sunto.** — Si riferisce sulle osservazioni di radiazione solare diretta e globale effettuate presso l'Istituto di Fisica Terrestre dell'Università di Napoli, in occasione dell'eclisse solare del 25 febbraio 1952, pervenendo alla conclusione che la radiazione solare diretta risultò in generale più bassa di quella prevista in relazione alle aree occultate del disco solare, anche tenendo conto della variazione del potere radiante del Sole dal centro ai bordi, ma che un tale effetto fu in maggiori proporzioni notato nella fase crescente dell'eclisse. Si accenna poi alle probabili cause del fenomeno, cause delle quali si trova conferma attraverso l'analisi della radiazione solare diffusa, che risultò, durante la fase crescente dell'eclisse, più alta di quella prevista.

*A) Radiazione solare diretta.*

E' stato adoperato un apposito apparecchio registratore consistente in un pireliometro a pila termoelettrica montato su un sostegno eliostatico e collegato ad un millivoltmetro registratore Richard. La mattina stessa dell'eclisse però, essendo sorto qualche dubbio sulla perfetta regolarità di marcia del sostegno eliostatico, fu deciso di effettuare contemporaneamente misure dirette di controllo mediante un pireliometro ÅNGSTRÖM a compensazione elettrica. Questo secondo apparecchio entrò perciò in funzione alcuni minuti dopo l'inizio dell'eclisse e precisamente alle 9<sup>h</sup> 38<sup>m</sup> e furono effettuate letture ogni 2 ÷ 3 minuti primi, fino alle 11<sup>h</sup> 30<sup>m</sup>, ossia fino a circa 15<sup>m</sup> dopo la fine dell'eclisse. Molto elevata era la sensibilità del pireliometro ÅNGSTRÖM adoperato, in quanto la sua costante,  $k$ , da me precedentemente determinata per confronto con altro pireliometro ÅNGSTRÖM di costante nota, era risultata molto più bassa di quella di apparecchi similari e precisamente si era ottenuto:

$$(1) \quad k = 1,55.$$

Nella seguente Tabella I sono riportati i risultati delle misure effettuate col pireliometro ÅNGSTRÖM. In essa l'intensità della radiazione solare diretta,  $q$ , è data, come di solito, in cal. cm.<sup>-2</sup>min.<sup>-1</sup>.



TABELLA I

T. M. E. C.	q	T. M. E. C.	q	T. M. E. C.	q
9 <sup>h</sup> 38 <sup>m</sup> ,0	0,884	10 <sup>h</sup> 19 <sup>m</sup> ,0	0,770	10 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup> ,0	0,967
41 ,0	0,849	21 ,0	0,804	58 ,0	0,933
44 ,0	0,836	23 ,0	0,837	11 0 ,0	1,002
46 ,0	0,846	25 ,0	0,849	2 ,0	1,070
48 ,0	0,759	27 ,0	0,856	4 ,0	1,017
50 ,0	0,754	29 ,0	0,857	6 ,0	1,046
52 ,0	0,781	31 ,0	0,874	8 ,0	1,081
54 ,0	0,792	33 ,0	0,860	10 ,0	1,042
10 1 ,0	0,706	35 ,0	0,884	13 ,0	1,049
3 ,0	0,736	38 ,0	0,896	15 ,0	1,061
5 ,0	0,727	41 ,0	0,956	18 ,0	1,004
7 ,0	0,764	43 ,0	1,030	20 ,0	1,051
9 ,0	0,728	45 ,0	0,992	22 ,0	1,081
11 ,0	0,714	47 ,0	0,961	24 ,0	1,078
13 ,0	0,757	49 ,0	0,925	26 ,0	1,042
15 ,0	0,754	52 ,0	0,944	28 ,0	1,058
17 ,0	0,770	54 ,0	0,921	30 ,0	1,030

Disponendo delle misure dirette di cui alla precedente Tabella e potendosi ritenere il numero  $N$  di divisioni, letto all'apparecchio registratore di cui si è fatto cenno all'inizio, proporzionale alla  $q$  osservata mediante l'ANGSTRÖM allo stesso istante, col metodo dei minimi quadrati è stato determinato il rapporto  $\frac{N}{q}$  ed è risultato:

$$(2) \quad \frac{N}{q} = 54,675.$$

Pertanto nella successiva Tabella II si riportano direttamente le quantità di calore  $q$  espresse in cal. cm.<sup>-2</sup>min<sup>-1</sup> desunte dall'analisi del diagramma ottenuto col detto registratore e servendosi della (2).

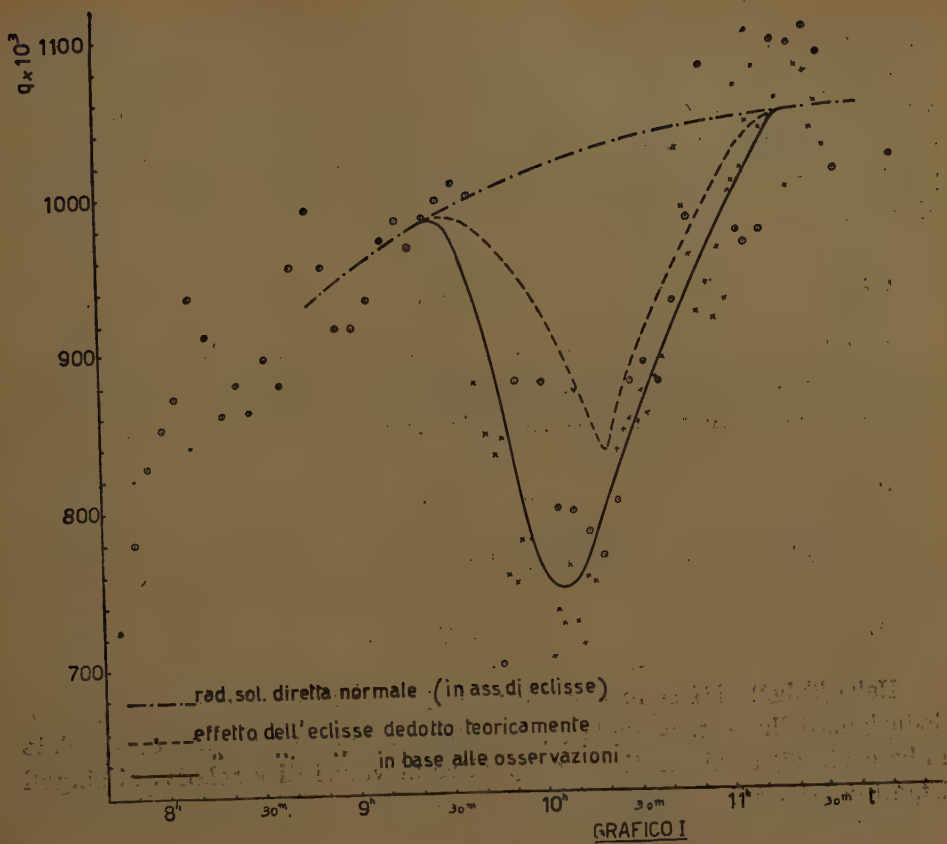
TABELLA II

T. M. E. C.	q	T. M. E. C.	q	T. M. E. C.	q
7 <sup>h</sup> 24 <sup>m</sup> ,0	0,744	8 <sup>h</sup> 59 <sup>m</sup> ,5	0,918	10 <sup>h</sup> 41 <sup>m</sup> ,4	0,933
32 ,1	0,834	9 4 ,5	0,936	46 ,4	0,986
36 ,1	0,845	9 ,2	0,973	51 ,1	1,083
41 ,2	0,772	14 ,0	0,986	11 0 ,2	0,978
45 ,5	0,726	18 ,5	0,959	4 ,7	0,969
50 ,0	0,781	22 ,6	0,988	9 ,5	0,977
54 ,5	0,830	27 ,1	0,999	14 ,0	1,099
59 ,3	0,854	32 ,1	1,010	19 ,0	1,096
8 3 ,8	0,874	56 ,6	1,006	24 ,0	1,107
8 ,3	0,938	45 ,5	0,702	28 ,5	1,090
13 ,3	0,913	51 ,1	0,883	33 ,0	1,015
18 ,3	0,863	59 ,3	0,882	51 ,1	1,024
22 ,8	0,882	10 3 ,8	0,801	12 10 ,2	1,185
26 ,4	0,865	8 ,3	0,799	14 ,9	1,194
31 ,4	0,898	13 ,8	0,786	19 ,2	1,174
36 ,4	0,882	18 ,3	0,770	24 ,0	1,222
40 ,5	0,957	22 ,8	0,805	28 ,5	1,205
45 ,5	0,993	27 ,4	0,882	33 ,0	1,227
50 ,0	0,957	31 ,9	0,894	37 ,6	1,222
55 ,0	0,918	36 ,4	0,882		

I dati delle due precedenti Tabelle sono stati riportati nel grafico I, in cui precisamente le crocette si riferiscono ai dati della Tabella I e i cerchi a quelli della Tabella II.

Dal detto grafico, attraverso la dispersione, a volte considerevole, dei punti, si rileva a prima vista che le condizioni meteorologiche del 25 febbraio 1952 all'Istituto di Fisica Terrestre di Napoli, non erano affatto le più idonee per misure di radiazione solare, principalmente a causa di uno strato di caligine di spessore e densità variabili. Pertanto, innanzi tutto si è ritenuto opportuno, per quanto riguarda le osservazioni fatte durante l'eclisse, procedere ad interpolazione grafica e riferirsi alla curva





media così ottenuta. Inoltre potendo l'analisi dei dati portare solo a risultati qualitativi e tenendo conto pure del relativamente breve intervallo di tempo da prendere in considerazione, si è assunta come curva teorica della radiazione solare diretta quella rappresentata dalla formula del POUILLET:

$$(3) \quad q = Ap^{\epsilon},$$

in cui  $\epsilon$  è lo spessore atmosferico attraversato dai raggi ed  $A, p$  sono due costanti alle quali corrisponderebbero i significati fisici, rispettivamente, di costante solare e di coefficiente di trasparenza. In altre parole si è assunto che il logaritmo di  $q$  vari linearmente con lo spessore atmosferico dai raggi e precisamente:

$$(4) \quad \log q = \log A + \epsilon \log p.$$

Per la deduzione delle costanti  $A$  e  $p$  si è applicato il metodo dei minimi quadrati alle osservazioni effettuate col pireliometro registratore e con l'ÅNGSTRÖM limitatamente a quelle immediatamente prima e immediatamente dopo l'eclisse sia a causa delle mutevoli condizioni dell'atmosfera, sia a causa della formula semplificata (3) applicata. Delle osservazioni precedenti l'eclisse, poi, si sono prese in considerazione solo quelle per le quali, indicando con  $\zeta$  la distanza zenitale, viene soddisfatta la condizione:

$$(5) \quad \zeta < 70^\circ.$$

In tal caso è praticamente trascurabile l'influenza della curvatura terrestre, in modo che lo spessore atmosferico  $\epsilon$  attraversato dai raggi, assumendo come unitario quello verticale, viene dato dalla relazione:

$$(6) \quad \epsilon = \sec \zeta.$$

Si è dedotta così, per la curva teorica di  $q$ , l'espressione analitica:

$$(7) \quad q = 1,236 \times 0,905^{\sec \zeta}.$$

Nella Tabella III sono riportati i dati presi in considerazione per la deduzione delle costanti della (7), le intensità della radiazione  $q_c$  calcolate in base alla (7) e gli scarti  $v = q_c - q$ , oltre ai valori di  $\epsilon$  relativi ai singoli istanti considerati.



TABELLA III

T. M. E. C.	q	$\epsilon$	q <sub>c</sub>	v
8 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> ,5	0,993	2,84	0,932	-0,061
50 ,0	0,957	2,75	0,940	-0,017
55 ,0	0,918	2,66	0,949	+0,031
59 ,5	0,918	2,58	0,957	+0,039
9 4 ,5	0,936	2,51	0,963	+0,027
9 ,2	0,973	2,44	0,970	-0,003
14 ,0	0,986	2,37	0,977	-0,009
18 ,5	0,969	2,32	0,981	+0,012
11 18 ,0	1,004	1,62	1,052	+0,048
19 ,0	1,096	1,62	1,052	-0,044
20 ,0	1,051	1,62	1,052	+0,001
22 ,0	1,081	1,61	1,053	-0,028
24 ,0	1,107	1,61	1,053	-0,054
24 ,0	1,078	1,61	1,053	-0,025
26 ,0	1,042	1,60	1,054	+0,012
28 ,0	1,058	1,60	1,054	-0,004
28 ,5	1,090	1,60	1,054	-0,036
30 ,0	1,030	1,60	1,054	+0,024
33 ,0	1,015	1,59	1,055	+0,040
51 ,1	1,024	1,57	1,057	+0,033

Gli scarti, di ambo i segni, senza mostrare alcun andamento particolare e della stessa entità in media per le osservazioni prima e dopo l'eclisse ma, specie talvolta, piuttosto rilevanti, inducono alle seguenti considerazioni:

1<sup>o</sup>) Può ritenersi che lo strato di caligine assorbente sopra accennato e la cui presenza è chiaramente dimostrata dal valore eccezionalmente basso dedotto per *A*, abbia prodotto effetti almeno qualitativamente paragonabili nell'intervallo immediatamente precedente ed in quello immediatamente seguente l'eclisse;

2<sup>o</sup>) Le condizioni fisiche dell'atmosfera nei due intervalli di tempo:

immediatamente precedente ed immediatamente seguente l'eclisse si presentavano in genere abbastanza mutevoli, ma oscillanti intorno ad un valore dell'intensità della radiazione solare più basso di quello normale.

Tuttavia, date le condizioni mutevoli dell'atmosfera, nulla a rigore possiamo dire per l'intervallo di tempo comprendente l'eclisse; ma, se ed in quanto la (7) può essere assunta quale curva teorica della radiazione solare durante l'eclisse, all'istante della fase massima risulta:

$$(8) \quad \zeta = 56^{\circ} 51'$$

e perciò in base alla (7):

$$(9) \quad q_c = 1,030,$$

sicchè:

$$(10) \quad \frac{q_c - q}{q_c} = 0,222$$

essendo  $q$  il valore osservato all'istante della fase massima, dedotto dalla curva ottenuta (Vedi Grafico I) per interpolazione grafica fra i punti rappresentativi delle osservazioni.

Si desume cioè una diminuzione prodotta dalla fase massima della eclisse pari al 22%.

Si è passati allora al calcolo della superficie coperta del disco solare durante la fase massima dell'eclisse.

Nota la così detta « grandezza » massima dell'eclisse, ossia la frazione del diametro solare appartenente alla congiungente i centri del Sole e della Luna, coperta dalla Luna all'istante della fase massima dell'eclisse, grandezza che per Napoli fu 0,31, rilevati dalla « Connaissance des temps » i raggi,  $R_s$ ,  $R_l$ , rispettivamente del Sole e della Luna allo stesso istante:

$$(11) \quad \begin{cases} R_s = 16'' 9^s,41 \\ R_l = 16'' 29^s,16 \end{cases}$$

si trova che la superficie coperta risulta i 198/1000 di quella del Sole.

Volendo tener conto, sia pure in via del tutto approssimata, dell'effetto della variazione del potere del Sole dal centro alla periferia, variazione che dovrebbe condurre ad una diminuzione della radiazione minore di quella calcolata in base alla superficie coperta, si è tenuta presente la memoria di BEMPORAD « Sul modo di variare della radiazione solare durante le fasi di un'eclisse ». In essa l'Autore, prendendo a base le osservazioni di SECCHI, VOGEL, LANGLEY, FROST sulla diminuzione del potere radiante

dal centro verso i bordi del Sole, rappresenta con la formula seguente i risultati di queste osservazioni:

$$(12) \quad \log J = -\mu \left\{ \sqrt{1 + 2\lambda + \lambda^2 (1 - r^2)} - \lambda \sqrt{1 - r^2} - 1 \right\},$$

essendo  $J$  il potere radiante alla distanza  $r$  dal centro,  $\lambda$  e  $\mu$  due costanti alle quali l'Autore, dopo alcuni tentativi, assegna in definitiva i valori:

$$(13) \quad \begin{aligned} \log \lambda &= 0,62452 \\ \log \mu &= 9,31933. \end{aligned}$$

Mediante numerose integrazioni il BEMPORAD calcola i valori della radiazione in corrispondenza delle parti scoperte del Sole durante le fasi di un'eclisse e compila una tabella (Tabella III della memoria citata), in base alla quale è possibile direttamente conoscere la diminuzione della radiazione solare prodotta dall'eclisse nelle sue varie fasi, conoscendo il rapporto,  $l$ , del raggio lunare a quello solare e il rapporto,  $b$ , della porzione scoperta del diametro del Sole appartenente alla congiungente i centri del Sole e della Luna, al raggio solare.

Non potendosi pervenire, come si è più volte accennato, se non a risultati quantitativi, si sono fatte le seguenti assunzioni:

1°) si è considerato costante durante tutta l'eclisse il rapporto  $l$  tra il raggio lunare e quello solare, pari al valore assunto all'istante della fase massima e cioè  $l = 1,02$ ;

2°) si è considerata linearmente variabile col tempo nei due intervalli inizio-fase massima e fase massima-fine la frazione occultata del diametro del sole appartenente alla congiungente i centri del Sole e della Luna.

Si è ottenuta così la seguente Tabella IV, nella quale oltre i simboli già precisati:

$q^*$  è la frazione dell'intensità della radiazione normale che si sarebbe dovuta osservare, nella corrispondente fase dell'eclisse, tenendo conto della superficie occultata e della variazione del potere radiante;

$q_c$  è l'intensità della radiozione normale in assenza dell'eclisse;

$q_c^*$  è l'intensità calcolata in base a  $q_c$  e tenendo conto della corrispondente  $q^*$ ;

$q$  è l'intensità della radiazione osservata, dedotta mediante interpolazione grafica dei punti riportati nel Grafico I.



TABELLA IV

T. M. E. C.	b	q*	$\varepsilon$	$o_c$	q <sub>c</sub> *	q	q <sub>c</sub> *-q
9 <sup>h</sup> 22 <sup>m</sup> ,6	2,00	1,000	2,27	0,986	0,986	0,986	0,000
32 ,1	1,90	0,991	2,17	0,996	0,987	0,968	+ 0,019
38 ,0	1,82	0,976	2,11	1,002	0,978	0,933	+ 0,045
44 ,0	1,76	0,962	2,06	1,007	0,969	0,890	+ 0,079
50 ,0	1,70	0,943	2,01	1,012	0,954	0,827	+ 0,127
10 1 ,0	1,58	0,901	1,93	1,020	0,919	0,754	+ 0,165
5 ,0	1,52	0,876	1,91	1,023	0,896	0,750	+ 0,146
9 ,0	1,48	0,859	1,88	1,025	0,880	0,753	+ 0,127
13 ,0	1,44	0,841	1,86	1,027	0,864	0,767	+ 0,097
17 ,0	1,40	0,822	1,84	1,029	0,846	0,792	+ 0,054
18 ,3	1,38	0,813	1,83	1,030	0,837	0,801	+ 0,036
21 ,0	1,40	0,822	1,81	1,033	0,849	0,816	+ 0,033
25 ,0	1,46	0,850	1,80	1,034	0,879	0,840	+ 0,039
29 ,0	1,50	0,868	1,78	1,036	0,899	0,861	+ 0,038
33 ,0	1,54	0,884	1,76	1,038	0,918	0,880	+ 0,038
38 ,0	1,60	0,909	1,74	1,040	0,945	0,905	+ 0,040
43 ,0	1,64	0,923	1,72	1,042	0,962	0,927	+ 0,035
47 ,0	1,68	0,937	1,70	1,044	0,978	0,944	+ 0,034
52 ,0	1,74	0,949	1,69	1,045	0,992	0,966	+ 0,026
56 ,0	1,78	0,967	1,67	1,047	1,012	0,982	+ 0,030
11 0 ,0	1,82	0,976	1,66	1,048	1,023	1,000	+ 0,023
4 ,0	1,88	0,987	1,65	1,049	1,035	1,015	+ 0,020
8 ,0	1,92	0,994	1,64	1,050	1,044	1,030	+ 0,014
13 ,0	1,96	0,997	1,63	1,051	1,048	1,046	+ 0,002
15 ,0	2,00	1,000	1,63	1,051	1,051	1,051	0,000

L'andamento degli scarti  $q_c^* - q$ , tutti positivi, reso ancora più evidente dal Grafico I in cui è stata riportata pure la curva teorica delle  $q_c^*$ , dimostra chiaramente che se in generale la radiazione osservata fu inferiore a quella prevista, bisogna però nettamente distinguere due fasi durante l'eclisse: Nella fase crescente dell'eclisse fino a 10<sup>h</sup> circa uno

strato di caligine di spessore e densità crescenti determinò un assorbimento assai cospicuo sicchè la radiazione osservata col progredire dell'eclisse fu sempre più marcatamente inferiore a quella prevista; poi dalle 10<sup>h</sup> fino all'istante della fase massima, l'assorbimento, pur mantenendosi ancora considerevole, va attenuandosi. Pertanto il minimo della registrazione dell'intensità della radiazione solare diretta si ha con un anticipo di circa 9<sup>m</sup> rispetto all'istante della fase massima; nella fase decrescente invece l'andamento di  $q$  è pressochè parallelo a quello di  $q_c^*$  ossia gli scarti si mantengono presso a poco costanti ed essendo relativamente modesti possono essere giustificati in parte tenendo conto delle assunzioni e semplificazioni fatte ed in parte con la modificazione del coefficiente  $p$  di trasparenza durante l'eclisse, dovuta ad esempio alle variazioni di temperatura prodotte dall'eclisse stessa, oltre che ad un eventuale strato di caligine di spessore e densità assai inferiori nei riguardi di quello presente nell'atmosfera durante la fase crescente. Si deve dire in ogni modo che le condizioni di trasparenza dell'atmosfera immediatamente prima e immediatamente dopo l'eclisse, che già si è detto potersi ritenere fra loro paragonabili e in base alle quali è stata dedotta la curva normale della radiazione, non sono assolutamente paragonabili almeno con quelle relative alle fase crescente dell'eclisse.

Si può dunque concludere:

L'eclisse visibile come parziale da Napoli e che a Napoli ebbe inizio alle 9<sup>h</sup> 22<sup>m</sup>, 5 (T. M. E. C.) del 25 febbraio 1952, ebbe il suo massimo alle 10<sup>h</sup> 18<sup>m</sup>, 3 ed ebbe termine alle 11<sup>h</sup> 15<sup>m</sup>, 8, con grandezza massima 0,31, basandosi sul calcolo dell'area del disco solare occultata dalla Luna all'istante della fase massima, avrebbe dovuto produrre una diminuzione della radiazione solare diretta di circa il 20%, supponendo uniforme per tutto il disco solare il suo potere radiante; tale percentuale si sarebbe dovuta ridurre a circa il 19% tenendo conto della diminuzione del potere radiante dal centro ai bordi del disco solare.

Dalle osservazioni si desume invece una diminuzione del 22% per l'istante della fase massima ed in generale una diminuzione sempre maggiore di quella che si desume dal calcolo teorico, anche per le altre fasi dell'eclisse, ma specialmente per la fase crescente.

Può dirsi perciò che se da un lato le osservazioni verificano almeno qualitativamente i risultati previsti, dall'altro gli scarti, che intorno alle 10<sup>h</sup> raggiungono la punta massima del 16%, sono dovuti alle particolari condizioni meteorologiche dell'atmosfera durante l'eclisse, ossia a variazione del coefficiente di trasparenza, provocata, tra l'altro, dall'eclisse stessa per variazioni di temperatura.

B) *Radiazione solare globale e diffusa.*

E' stato adoperato un solarigrafo GORCZYŃSKI a pila termoelettrica di MOHLL collegato ad un millivoltmetro RICHARD (Scala 0÷10 divisioni).

Nella seguente Tabella V si riportano i dati ottenuti dallo spoglio del diagramma, trascurando quelli troppo prima o quelli troppo dopo l'eclisse: in essa con  $N$  si indica il numero di divisioni.

TABELLA V

T. M. E. C.	N	T. M. E. C.	N	T. M. E. C.	N
8 <sup>h</sup> 26 <sup>m</sup> ,6	1,15	8 <sup>h</sup> 41 <sup>m</sup> ,6	1,34	9 <sup>h</sup> 4 <sup>m</sup> ,9	1,60
32 ,1	1,15	46 ,2	1,35	9 ,0	1,65
36 ,6	1,23	55 ,3	1,58	13 ,1	1,85
9 18 ,6	1,93	10 32 ,9	2,21	11 18 ,9	2,95
23 ,6	2,02	37 ,9	2,26	24 ,9	3,08
33 ,2	2,05	42 ,9	2,28	33 ,1	3,00
37 ,7	2,15	47 ,5	2,37	38 ,1	3,05
42 ,3	2,16	51 ,1	2,49	43 ,1	3,08
10 4 ,2	2,02	55 ,7	2,66	12 1 ,8	3,19
10 ,5	1,93	11 0 ,7	2,67	6 ,8	3,22
15 ,1	2,08	5 ,7	2,68	10 ,5	3,26
20 ,1	1,83	10 ,3	2,72	14 ,6	3,19
23 ,8	1,99	14 ,4	2,88	20 ,5	3,31

Prendendo in considerazione dieci punti precedenti l'eclisse (precisamente l'intervallo dalle 8<sup>h</sup> 26<sup>m</sup>, 6 alle 9<sup>h</sup> 18<sup>m</sup>, 6) e dieci punti seguenti l'eclisse (precisamente l'intervallo dalle 11<sup>h</sup> 18<sup>m</sup>, 9 alle 12<sup>h</sup> 20<sup>m</sup>, 5), assumendo parabolica del 2° ordine la curva rappresentatrice della radiazione globale nell'intervallo considerato e scegliendo, per comodità di calcolo, come origine degli assi cartesiani di riferimento il punto 0 di coordinate  $N_0=0,0$  e  $t_0=10^h 30^m, 0$ , col metodo dei minimi quadrati sono state determinate le costanti della curva di equazione:

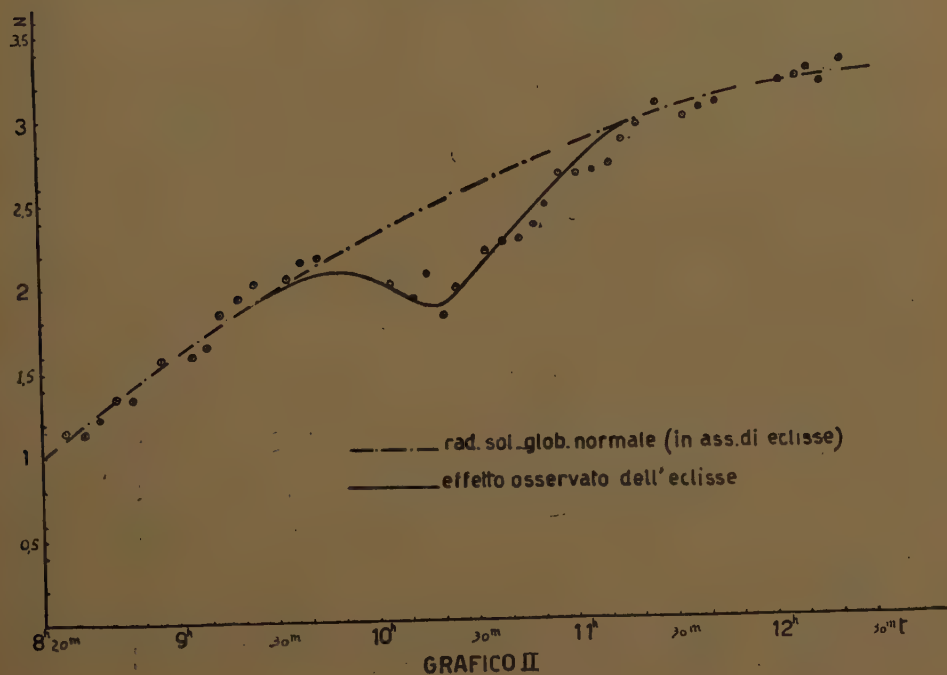
$$(14) \quad N = a(t - 10^h 30^m, 0)^2 + b(t - 10^h 30^m, 0) + c.$$



Ed è risultato :

$$(15) \quad \begin{cases} a = -27028.10^{-9} \\ b = + 8836.10^{-6} \\ c = + 2608.10^{-3} \end{cases}$$

La curva di equazione (14) è stata tracciata per punti nel Grafico II



Sullo stesso grafico sono stati poi riportati i punti ottenuti mediante il Solarigrafo GORCZYNSKI durante l'eclisse e si è proceduto ad interpolazione grafica di essi.

Sia  $q$  l'intensità della radiazione solare diretta,  $q_g$  l'intensità della radiazione solare globale relativa allo stesso istante e  $q_d$  l'intensità della radiazione diffusa dalla volta celeste. Si avrà :

$$(16) \quad q_g = q \cdot \cos \zeta + q_d$$

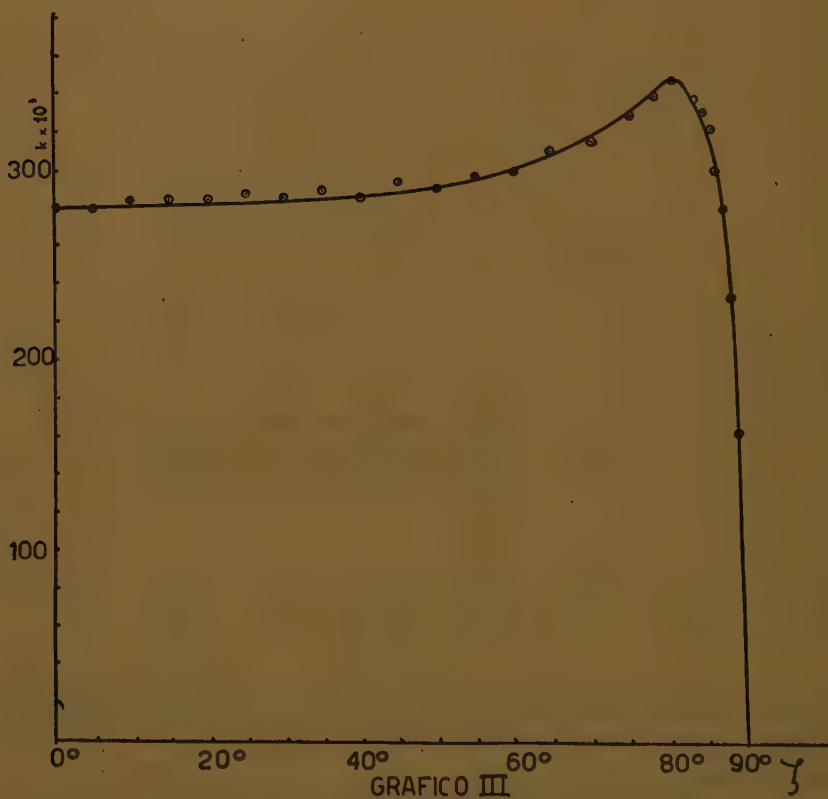
essendo  $\zeta$  la distanza zentitale del Sole e rappresentando perciò  $q \cdot \cos \zeta$  la radiazione solare diretta ridotta all'orizzonte. Si è applicata la (16) per poter pervenire alla determinazione di  $q_d$ .

E' noto che nel solarigrafo di GORCZYNSKI la costante strumentale (quella per cui occorre moltiplicare il numero  $N$  di divisioni letto al

millivoltmetro per ottenere l'intensità della radiazione in cal. cm.<sup>-2</sup>min.<sup>-1</sup>) varia con l'angolo di incidenza dei raggi che colpiscono la pila termoelettrica, ossia per quanto riguarda almeno la radiazione solare diretta ridotta all'orizzonte varia con la distanza zenitale del Sole.

Nota quindi l'intensità  $q$  della radiazione solare diretta ad un dato istante, noto l'angolo  $\zeta$  al medesimo istante in base alla nota formula;

$$(17) \quad \cos \zeta = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t,$$



dove  $\varphi$  è la latitudine geografica del luogo d'osservazione,  $\delta$  la declinazione del Sole e  $t$  l'angolo orario del Sole (ora vera), nota perciò l'intensità della radiazione solare diretta ridotta all'orizzonte (in cal. cm.<sup>-2</sup>min.<sup>-1</sup>), occorrerà conoscere la costante  $k(\zeta)$  relativa alla distanza zenitale  $\zeta$  per poter ottenere il numero  $N'$  di divisioni spettanti alla radiazione solare diretta. Sperimentalmente, con un particolare dispositivo appositamente costruito presso l'Istituto di Fisica Terrestre di Napoli e del quale parlerò più diffusamente in altro lavoro, è stato possibile ottenere la curva di variazione di  $k(\zeta)$  in funzione di  $\zeta$  (Grafico III).

Noto così il numero  $N'$  di divisioni corrispondenti alla sola radiazione diretta in un determinato istante, e noto il numero  $N$  di divisioni corrispondenti alla radiazione globale nello stesso istante, si è potuto, per differenza, determinare il numero di divisioni  $N_d$  corrispondenti alla radiazione diffusa:

$$(18) \quad N_d = N - N'.$$

Un tale metodo per la determinazione della intensità della radiazione diffusa (in divisioni della scala del millvoltmetro registratore) è stato applicato nell'intervallo dell'eclisse sia alle curve teoriche rappresentanti l'andamento della radiazione rispettivamente diretta o globale in assenza di eclisse, sia alle due curve ottenute per interpolazione grafica fra i punti relativi alla radiazione diretta o globale osservata effettivamente durante l'eclisse.

I risultati sono riportati nelle seguenti Tabelle VI e VII, nelle quali, oltre ai simboli già noti:

$N_{dc}$  è il numero di divisioni relativo alla radiazione diffusa normale in assenza di eclisse;

$N_{do}$  è il numero di divisioni relativo alla radiazione diffusa osservata;

$N_{gc}$ ,  $N_{go}$  sono analogamente i numeri di divisioni relativi alla radiazione globale, rispettivamente normale ed osservata;

$N'_c$ ,  $N'_o$  sono infine i numeri di divisioni spettanti alla radiazione solare diretta rispettivamente normale ed osservata all'orizzonte.



TABELLA VI

T. M. E C	$q_c \cos \zeta$	$k (\zeta)$	$N'_c$	$N_{gc}$	$N_{dc}$
9 <sup>h</sup> 22 <sup>m</sup> ,6	0,435	0,305	1,426	1,889	0,46
32 ,1	0,459	0,303	1,515	2,005	0,49
38 ,0	0,475	0,301	1,578	2,076	0,50
44 ,0	0,489	0,300	1,630	2,145	0,52
50 ,0	0,503	0,298	1,688	2,212	0,52
10 1 ,0	0,528	0,297	1,778	2,329	0,55
5 ,0	0,537	0,297	1,808	2,370	0,56
9 ,0	0,545	0,296	1,841	2,410	0,57
13 ,0	0,553	0,296	1,868	2,450	0,58
17 ,0	0,561	0,296	1,895	2,488	0,59
18 ,3	0,563	0,295	1,908	2,501	0,59
21 ,0	0,569	0,295	1,929	2,526	0,60
25 ,0	0,576	0,295	1,953	2,563	0,61
29 ,0	0,583	0,295	1,976	2,599	0,62
33 ,0	0,590	0,294	2,007	2,635	0,63
38 ,0	0,598	0,294	2,034	2,677	0,64
43 ,0	0,606	0,294	2,061	2,718	0,66
47 ,0	0,613	0,293	2,092	2,750	0,66
52 ,0	0,619	0,293	2,113	2,789	0,68
56 ,0	0,625	0,293	2,133	2,820	0,69
11 0 ,0	0,630	0,292	2,158	2,849	0,69
4 ,0	0,635	0,292	2,175	2,877	0,70
8 ,0	0,640	0,292	2,192	2,905	0,71
13 ,0	0,645	0,292	2,209	2,938	0,73
15 ,0	0,647	0,292	2,216	2,951	0,74

TABELLA VII

T. M. E. C.	$q. \cos \zeta$	$k (\zeta)$	$N'_o$	$N_{go}$	$N_{do}$
9 <sup>h</sup> 22 <sup>m</sup> ,6	0,435	0,305	1,43	1,89	0,46
32 ,1	0,447	0,303	1,48	2,00	0,52
38 ,0	0,442	0,301	1,47	2,06	0,59
44 ,0	0,432	0,300	1,44	2,09	0,65
50 ,0	0,411	0,298	1,38	2,10	0,72
10 1 ,0	0,390	0,297	1,31	2,04	0,73
5 ,0	0,394	0,297	1,33	1,99	0,66
9 ,0	0,400	0,296	1,35	1,95	0,60
13 ,0	0,413	0,296	1,40	1,91	0,51
17 ,0	0,431	0,296	1,46	1,88	0,42
18 ,3	0,438	0,295	1,49	1,88	0,39
21 ,0	0,450	0,295	1,53	1,90	0,37
25 ,0	0,468	0,295	1,59	1,98	0,39
29 ,0	0,485	0,295	1,65	2,06	0,41
33 ,0	0,500	0,294	1,70	2,14	0,44
38 ,0	0,521	0,294	1,77	2,24	0,47
43 ,0	0,539	0,294	1,83	2,35	0,52
47 ,0	0,554	0,293	1,89	2,43	0,54
52 ,0	0,572	0,293	1,95	2,54	0,59
56 ,0	0,586	0,293	2,00	2,62	0,62
11 0 ,0	0,601	0,292	2,06	2,70	0,64
4 ,0	0,614	0,292	2,10	2,78	0,68
8 ,0	0,627	0,292	2,15	2,85	0,70
13 ,0	0,642	0,292	2,20	2,92	0,72
15 ,0	0,647	0,292	2,22	2,94	0,72

Gli andamenti di  $N_{dc}$  e di  $N_{do}$  sono riportati nel Grafico IV.

Per la variabilità con  $\zeta$  della costante strumentale  $k (\zeta)$  del GORCZYNSKI si è calcolata la radiazione diffusa in divisioni. Per passare infatti alle cal.  $\text{cm.}^{-2}\text{min.}^{-1}$ , si sarebbe dovuto tener conto del contributo delle singole zone elementari  $dS$  della calotta celeste nei riguardi della radiazione diffusa

e ad ogni elemento  $dN_d$  di ordinata solarigrafica corrispondente applicare il particolare coefficiente  $k$  ( $\zeta$ ) relativo alla inclinazione con la quale la considerata zona inviava la luce diffusa sulla termopila; indi integrare estendendo l'integrazione a tutta la volta celeste. Ciò non è stato fatto date le condizioni atmosferiche della giornata che mal si prestavano.

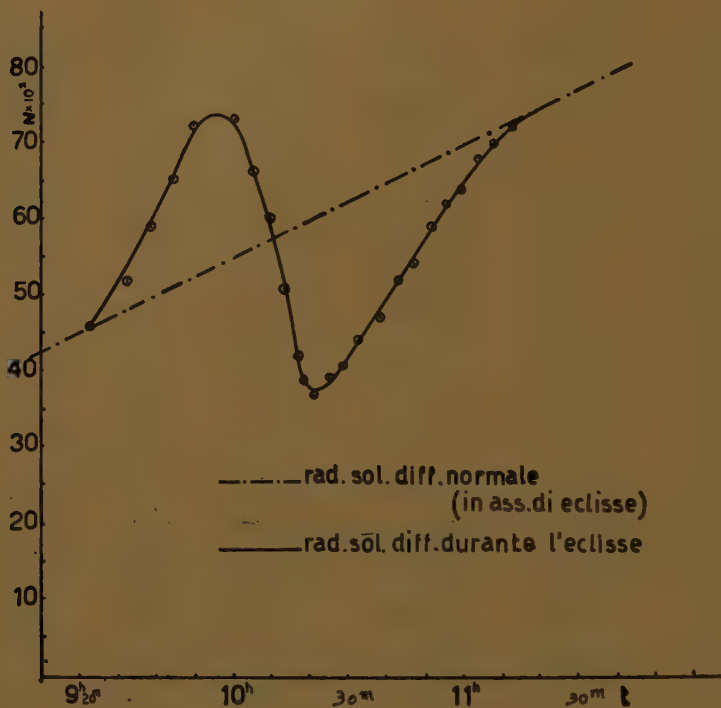


GRAFICO IV

#### Concludendo:

Attraverso l'analisi delle osservazioni di radiazione globale si riceve una conferma delle peggiorate condizioni di trasparenza dell'atmosfera nella fase crescente dell'eclisse, fatto già emerso nell'analisi delle osservazioni di radiazione solare diretta.

Precisamente, nella fase crescente dell'eclisse, quello stesso strato di caligine che determinò un cospicuo assorbimento della radiazione solare diretta, sicchè i valori osservati risultarono assai più bassi di quelli previsti fu causa al tempo stesso di una accentuata diffusione e pertanto fino a circa 10h, la radiazione diffusa anzichè diminuire, come ci si sarebbe atteso se le condizioni di trasparenza fossero rimaste le stesse rispetto all'intervallo immediatamente precedente l'eclisse, subisce un cospicuo aumento.

Altra prova di ciò è il fatto che la radiazione globale stessa fino a



10<sup>h</sup> circa, prima continua a crescere con andamento quasi coincidente con quello della curva teorica (in assenza di eclisse), poi si mantiene pressochè costante e solo a partire da 9<sup>h</sup> 50<sup>m</sup> comincia lentamente a decrescere.

Questo lavoro è stato eseguito sotto la direzione del prof. IMBÒ, che vivamente ringrazio.

*Napoli, Istituto di Fisica terrestre dell' Università, 3-10-1952.*

#### BIBLIOGRAFIA

- 1 - G. IMBÒ - *Nuovo metodo per rappresentare le variazioni dell'intensità della radiazione solare in funzione degli spessori atmosferici attraversati dai raggi.* Atti Acc. Gioenia, Vol. XVI, Mem. IV bis.
- 2 - A. BEMPORAD - *Osservazioni pireliometriche eseguite a Capodimonte nell'anno 1914.* Mem. R. Oss. Capodimonte N. 6.
- 3 - A. BEMPORAD - *Sul modo di variare della radiazione solare durante le fasi di un'eclisse.* Atti Acc. Gioenia, S. IV, Vol. XIX.
- 4 - M. MEROLA e A. FRESA - *Studio della radiazione solare durante le fasi dell'eclisse del 29 giugno 1927.* Oss. Astronom. di Capodimonte, Contrib. Astronom., N. 49.

MISURE DI LUMINOSITÀ DEL CIELO EFFETTUATE ALL' OSSERVATORIO  
VESUVIANO DURANTE L' ECLISSE SOLARE DEL 25/2/1952

*Nota del dott. Lorenzo Casertano, presentata dal socio Giuseppe Imbò*

(Adunanza del dì 7 febbraio 1952)

**Sunto** — Dallo studio della luminosità del cielo osservata all'Osservatorio Vesuviano in occasione dell'eclisse solare del 25 febbraio 1952 si ricava che la diminuzione percentuale della luminosità risulta regolare soltanto nell'azzurro e per altezze ( $\varphi$ ) della visuale comprese nell'intervallo  $90^\circ \leq \varphi \leq 120^\circ$ ; si ha però ragione di ritenere che per  $\varphi \geq 70^\circ$  per il rosso, e per  $70^\circ < \varphi < 90^\circ$  per l'azzurro, vi sono state delle cause perturbatrici di origine meteorologica.

1) Le misure sono state effettuate con l'attrezzatura adoperata dal Prof. CARRELLI, <sup>1)</sup> prima, e dalla Dott.ssa RESCIGNO <sup>2)</sup> poi, e composta essenzialmente da una cellula fotoelettrica collegata a un galvanometro a lettura diretta e ad alta sensibilità ( $4,1 \times 10^{-9}$  A).

Sono state eseguite letture per altezze ( $\varphi$ ) della visuale contenute nel piano verticale del Sole, e distanziate di  $10^\circ$  l'una dall'altra: per la posizione della stazione (situata sulla terrazza del Salone Palmieri) l'orizzonte non è risultato completamente libero, per cui non sono state eseguite misure per altezze di  $0^\circ, 170^\circ$  e  $180^\circ$ ; né è stato possibile, per la sensibilità del galvanometro, eseguire letture per altezze ( $\varphi$ ) prossime a quella del Sole indicata con  $\varphi_0$ . Le considerazioni quindi si debbono limitare all'intervallo  $50^\circ \leq \varphi \leq 160^\circ$ .

Sono stati adoperati due filtri rispettivamente rosso e azzurro. Non conoscendo le caratteristiche dei due filtri le ricerche non si prestano a considerazioni comparative.

Poichè contemporaneamente si son dovuto eseguire con la stessa apparecchiatura anche misure del grado di polarizzazione della luce diffusa, nel corso dell'eclisse è stato possibile effettuare soltanto tre serie di letture; una sola serie è stata eseguita prima dell'inizio, e di quelle eseguite dopo la fine si è dovuto prendere in considerazione soltanto la prima: infatti soltanto questa appartiene alle ore del mattino, e da quanto si vedrà in seguito è conveniente separare le serie del mattino da quelle del pomeriggio.

---

<sup>1)</sup> Atti Acc. Naz. Lincei, CCCXLIII, 1012, 1946.

<sup>2)</sup> Rend. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, ser. 4, XIV, 1946.

Per ognuna delle serie si è considerata costante  $\varphi_0$  e corrispondente all'altezza del Sole all'atto della lettura eseguita per  $\varphi = 90^\circ$ . Nella Tabella I sono riportati per le cinque serie prese in esame con le altezze del Sole ( $\varphi_0$ ) le ore corrispondenti (h).

A causa delle condizioni meteorologiche non è stato possibile eseguire altre analoghe serie di letture nei giorni immediatamente vicini a quello dell'eclisse. Non riesce perciò possibile confrontare la curva della variazione della luminosità del cielo nel corso del giorno per il 25 febbraio con quella dei giorni contigui o anche immediatamente vicini; per ricavare gli effetti dell'eclisse si è perciò ritenuto opportuno confrontare gli andamenti sperimentali con particolari curve teoriche.

TABELLA I

SERIE	$\varphi_0$		h	
I	21°	19'	8 <sup>h</sup>	50 <sup>m</sup>
II	28	8	9	37
III	33	20	10	20
IV	37	10	11	3
V	39	47	12	12

2) Per trovare un andamento teorico si considera l'atmosfera omogenea priva di pulviscolo e di vapor d'acqua, e limitata da due superficie piane e parallele <sup>1)</sup> di cui le rette  $r$  ed  $s$  della Fig. 1 rappresentano le tracce nel piano verticale del Sole passante per il punto stazione 0.

Facilmente si ricava che la quantità di luce diffusa che arriva in 0 secondo la direzione  $OB$  è data da:

$$[1] \quad I = \frac{I_0}{K} \frac{\text{sen} \varphi_0}{\text{sen} \varphi - \text{sen} \varphi_0} \left[ e^{-\frac{K}{\text{sen} \varphi}} - e^{-\frac{K}{\text{sen} \varphi_0}} \right]$$

essendo  $I_0$  l'intensità al limite dell'atmosfera e  $K$  il coefficiente di trasmissione. (Il valore di questo coefficiente è stato ricavato da  $e^{-K} = 0.95$  per

<sup>1)</sup> Questa semplificazione è consentita dal fatto che è sempre  $\varphi_0 > 20^\circ$  e  $\varphi \leq 160^\circ$ .





trascurarsi almeno inizialmente il fatto che la luce è parzialmente naturale.

Si fa intanto notare che dalle [2] il valore minimo di  $I$  per  $\varphi_0$  costante si ricava per  $\varphi = 90^\circ$ : ciò che non è stato ottenuto per alcuna curva tracciata in base ai dati sperimentali. Mentre sempre per quel che riguarda il valore di  $\varphi$  corrispondente al valore minimo di  $I$  per un determinato valore di  $\varphi_0$ , un ottimo accordo con gli andamenti sperimentali si ottiene considerando le curve che si ricavano dalle [3]. Sono quindi queste le formule che inizialmente vengono considerate rispondenti alle condizioni fisiche dell'atmosfera.

3) Nelle figg. 2 e 3 sono riportati gli andamenti, teorici e sperimentali delle variazioni della luminosità del cielo in funzione delle altezze

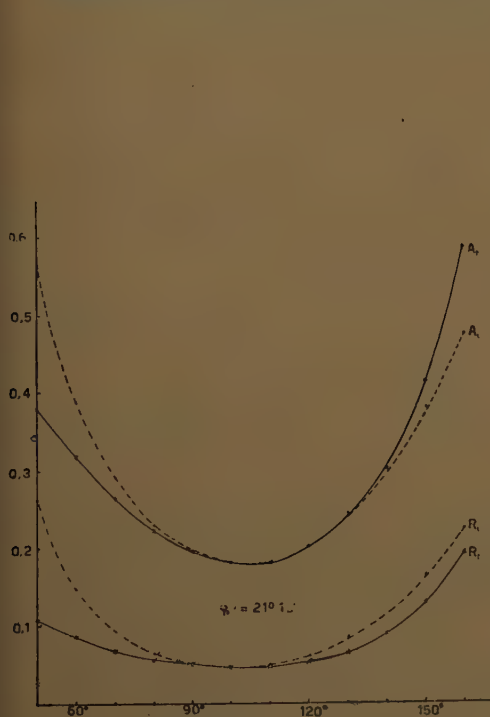


Fig. 2.

$A_t$  curva teorica per l'azzurro;  $A_s$  curva sperimentale per l'azzurro;  $R_t$  curva teorica per il rosso;  $R_s$  curva sperimentale per il rosso.

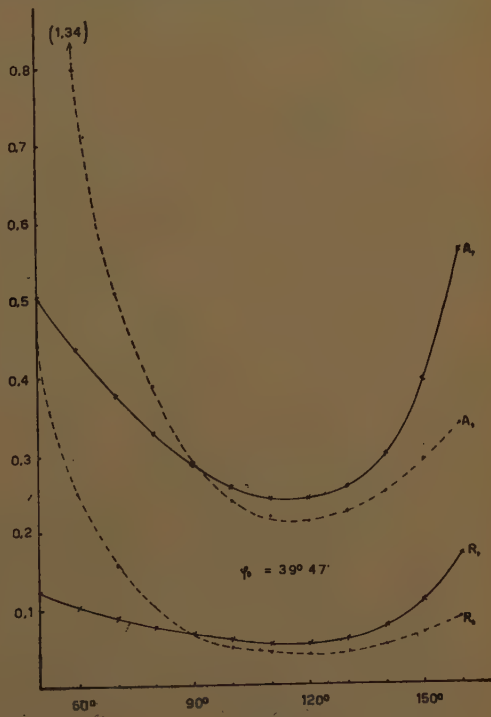


Fig. 3.

( $\varphi$ ) della visuale per valori costanti dell'altezza ( $\varphi_0$ ) del Sole. Le ordinate rappresentano per le curve teoriche i valori  $2 \frac{I}{I_0} K$ , e, per le sperimentali, valori proporzionali alle deviazioni al galvanometro: per ogni curva il coefficiente di proporzionalità è tale da rendere uguale al teorico il valore sperimentale letto per  $\varphi = 90^\circ$ .

Dai confronti di queste curve si rilevano, da una parte una

analogia di andamento, e, dall'altra, degli scostamenti fra i valori corrispondenti che non solo non sono trascurabili ma che mostrano una certa regolarità di variazione. Senza entrare nell'analisi delle cause di tali scostamenti, se ne son voluti eliminare gli effetti. Perciò sono stati calcolati, per le diverse altezze  $\varphi$ , i rapporti  $R$  fra i valori sperimentali della luminosità e quelli teorici. Per il confronto tra serie diverse sono state assunte come indici dei valori sperimentali della luminosità le deviazioni lette al galvanometro.

Sono state tracciate quindi le curve delle funzioni  $R(\varphi)$ , per valori costanti di  $\varphi$ . Gli andamenti ottenuti sono risultati abbastanza regolari; anzi considerando separatamente quelli ottenuti per le serie eseguite nelle ore del mattino, da quelle delle serie del pomeriggio si è notato anche una buona regolarità della variazione da un andamento a un altro: nella figura 4 sono riportati (i soli che interessano ai fini della presente ricerca) gli andamenti che si hanno per le serie I e V e, rispettivamente, per il rosso e per l'azzurro. Per la riferita—e osservabile—regolarità di variazione è stato possibile ricavare, per interpolazione fra i valori delle curve riportate, il rapporto  $R$  anche per le altezze del Sole corrispondenti alle serie di letture (II, III e IV) eseguite nel corso dell'eclisse.

Nella Tabella II sono riportati i valori ottenuti per tutte le cinque serie del mattino: anche per le serie I e V sono stati accettati i valori che si ricavano dalle curve anzichè quelli avuti dai calcoli.

Moltiplicando ogni dato sperimentale per l'opportuno valore  $1/R$  è possibile ottenere i valori che potrebbero essere considerati sperimentali qualora fossero valide le [2]<sup>1)</sup>.

Nelle Tabelle III *a* e III *b* sono riassunti i dati ottenuti, in base ai quali si ricavano gli andamenti—alcuni dei quali sono riprodotti nei grafici delle figg. 5-7—della variazione della luminosità del cielo nel corso del giorno per determinati valori  $\varphi$  dell'altezza della visuale situata nel piano verticale del Sole.

4) E' possibile così ricavare per ogni  $\varphi$ , in corrispondenza della fase del massimo occultamento della superficie solare—verificatesi a  $10^{\text{a}}$   $18^{\text{m}}$ —la diminuzione percentuale della luminosità del cielo per le zone rossa e azzurra dello spettro visibile.

Per una maggiore precisione si son volute riportare in grafici le differenze fra valori teorici e quelli sperimentali (corretti come detto sopra)

<sup>1)</sup> Più precisamente si sarebbero dovuti lasciare invariati i valori sperimentali e moltiplicare invece i teorici per  $R$ ; mentre però non si sarebbero ottenuti, come si è voluto verificare, risultati diversi da quelli che si ottengono ora, si sarebbero invece resi meno precisi gli andamenti delle curve teoriche, i cui punti caratterizzano curve molto regolari. Né ne avrebbero guadagnato le curve sperimentali che, in entrambi i casi, presentano irregolarità, anche se, nella trattazione che segue, esse risultano, in verità, più accentuate.



della luminosità in funzione di  $\varphi$  in corrispondenza del massimo occultamento. Si è così potuto notare che le relative curve del rosso e dell'azzurro per  $70^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$  presentano entrambe degli apprezzabili scarti nello

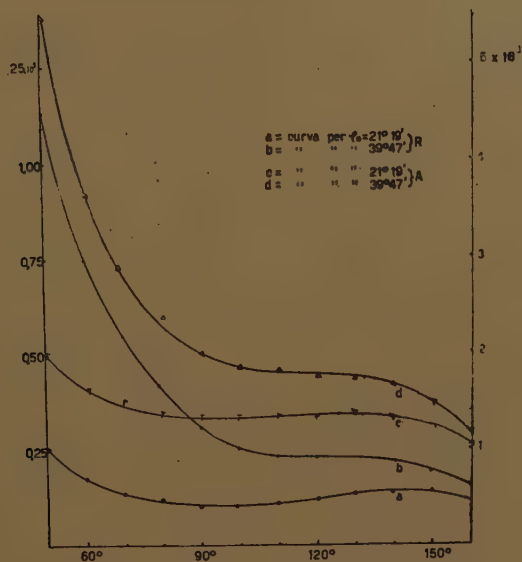


Fig. 4.

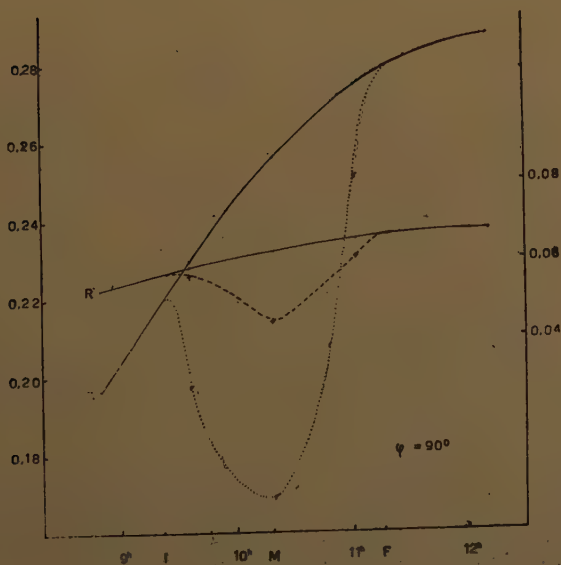


Fig. 5.

Fig. 4 e fig. 5. Le ordinate a sinistra sono per le curve dell'azzurro (A), quelle a destra per le curve del rosso (R). Le curve a tratto continuo sono le teoriche, le altre sono le sperimentali: i punti relativi alle serie I e V per le curve teoriche e sperimentali sono quasi sempre coincidenti.

stesso senso. Ciò fa ritenere che in quella zona del cielo dovevano esserci condizioni di diffusione diverse da quelle delle altre zone.

Nei grafici delle figg. 8 e 9 sono riportati, con gli andamenti dei valori teorici e sperimentali della luminosità in funzione delle altezze  $\varphi$  (per  $\varphi_0$  corrispondente alla fase di massimo dell' eclisse) anche le differenze di cui si è detto sopra: tenendo conto anche di questi grafici si ricavano,

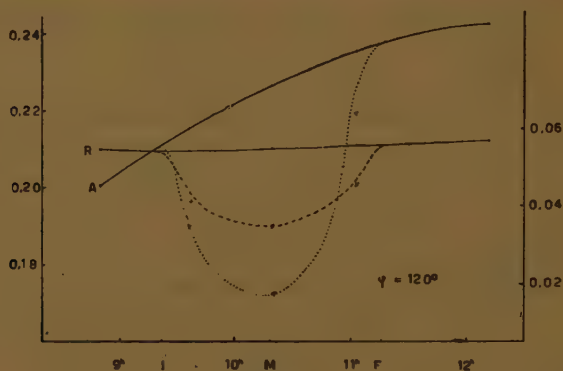


Fig. 6.

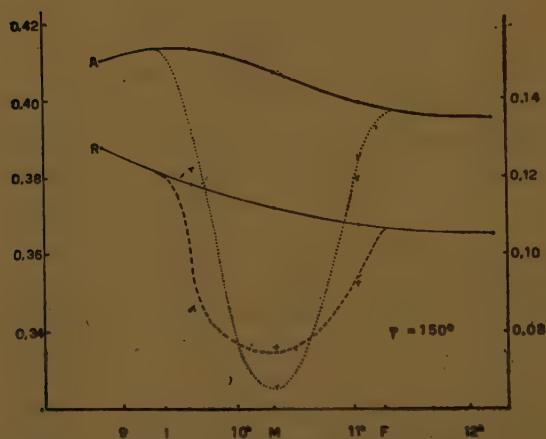


Fig. 7.

Fig. 6 e fig. 7. Le ordinate a sinistra sono per le curve dell'azzurro (A), quelle a destra per le curve del rosso (R). Le curve a tratto continuo sono teoriche, le altre sono le sperimentali: i punti relativi alle serie I e V per le curve teoriche e sperimentali sono quasi sempre coincidenti.

in funzione di  $\varphi$ , le diminuzioni percentuali della luminosità del cielo, nelle zone rossa e azzurra, determinate dal massimo occultamento.

Nella Tabella IV sono riportati i valori ricavati, e nei grafici della fig. 11 gli andamenti che si ottengono, in base a questi valori, delle diminuzioni percentuali in funzione delle altezze  $\varphi$ .

Dall' uniformità degli andamenti per il rosso e per l' azzurro sembra di poter affermare che gli effetti dell' eclisse sulla luminosità decrescono

TABELLA II

$\varphi$	R O S S O					A Z Z U R R O				
	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V
50°	1.02	2.30	3.28	4.01	4.50	0.502	0.818	1.059	1.237	1.359
60°	0.70	1.55	2.20	2.68	3.01	0.415	0.598	0.737	0.840	0.910
70°	0.53	1.12	1.57	1.90	2.12	0.371	0.490	0.582	0.649	0.695
80°	0.46	0.90	1.24	1.49	1.66	0.350	0.438	0.504	0.554	0.587
90°	0.42	0.72	0.95	1.12	1.24	0.337	0.400	0.449	0.484	0.509
100°	0.40	0.63	0.80	0.93	1.02	0.335	0.384	0.422	0.449	0.468
110°	0.42	0.61	0.75	0.86	0.93	0.335	0.379	0.413	0.438	0.455
120°	0.47	0.64	0.77	0.86	0.92	0.342	0.382	0.412	0.434	0.450
130°	0.54	0.67	0.78	0.85	0.91	0.347	0.383	0.410	0.431	0.445
140°	0.57	0.68	0.77	0.84	0.88	0.342	0.374	0.398	0.416	0.429
150°	0.54	0.63	0.71	0.76	0.79	0.318	0.339	0.355	0.367	0.375
160°	0.48	0.54	0.58	0.61	0.63	0.272	0.283	0.291	0.298	0.302

TABELLA III *a*

$\varphi$	I		II		III		IV		V	
	S/R	T	S/R	T	S/R	T	S/R	T	S/R	T
50°	0.1089	0.1074	0.1314	0.1141	0.0809	0.1183	0.1106	0.1207	0.1208	0.1219
60°	0.0885	0.0867	0.1061	0.0938	0.0770	0.0987	0.1083	0.1019	0.1030	0.1038
70°	0.0692	0.0715	0.0832	0.0784	0.0639	0.0833	0.0897	0.0870	0.0897	0.0891
80°	0.0624	0.0605	0.0679	0.0664	0.0524	0.0713	0.0730	0.0749	0.0774	0.0773
90°	0.0528	0.0530	0.0561	0.0579	0.0446	0.0621	0.0612	0.0654	0.0664	0.0677
100°	0.0498	0.0494	0.0425	0.0528	0.0393	0.0561	0.0524	0.0589	0.0608	0.0608
110°	0.0496	0.0498	0.0376	0.0514	0.0347	0.0534	0.0488	0.0554	0.0562	0.0568
120°	0.0551	0.0551	0.0400	0.0546	0.0346	0.0551	0.0455	0.0560	0.0562	0.0568
130°	0.0688	0.0669	0.0483	0.0639	0.0386	0.0625	0.0520	0.0621	0.0605	0.0619
140°	0.0800	0.0886	0.0576	0.0828	0.0504	0.0790	0.0605	0.0771	0.0748	0.0751
150°	0.1319	0.1280	0.0862	0.1185	0.0765	0.1120	0.0925	0.1075	0.1041	0.1050
160°	0.2074	0.1930	0.1532	0.1905	0.1339	0.1803	0.1620	0.1726	0.1675	0.1677



TABELLA III b

$\varphi$	I		II		III		IV		V	
	S/R	T	S/R	T	S/R	T	S/R	T	S/R	T
50°	0.3801	0.3806	0.3519	0.4383	0.3162	0.4716	0.4342	0.4914	0.5069	0.5041
60°	0.3157	0.3156	0.3283	0.3699	0.2837	0.4054	0.3904	0.4283	0.4436	0.4427
70°	0.2663	0.2618	0.2731	0.3095	0.2412	0.3418	0.3349	0.3634	0.3718	0.3769
80°	0.2239	0.2228	0.2294	0.2695	0.2056	0.2943	0.2824	0.3159	0.3386	0.3287
90°	0.1967	0.1961	0.1976	0.2311	0.1694	0.2571	0.2520	0.2760	0.2881	0.2888
100°	0.1830	0.1822	0.1903	0.2101	0.1708	0.2315	0.2237	0.2479	0.2589	0.2588
110°	0.1848	0.1824	0.1863	0.2031	0.1668	0.2191	0.2167	0.2305	0.2464	0.2405
120°	0.1963	0.2006	0.1896	0.2151	0.1729	0.2261	0.2190	0.2352	0.2408	0.2422
130°	0.2407	0.2372	0.2226	0.2455	0.1919	0.2492	0.2320	0.2525	0.2542	0.2561
140°	0.3029	0.3030	0.2785	0.3069	0.2337	0.3054	0.2784	0.3035	0.2934	0.2958
150°	0.4109	0.4104	0.3823	0.4130	0.3260	0.4076	0.3795	0.3998	0.3952	0.3948
160°	0.5904	0.5872	0.5680	0.5972	0.4796	0.5911	0.5712	0.5753	0.5660	0.5656

TABELLA IV

$\varphi$	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°
ROSSO	27.1	22.2	21.3	23.1	26.1	30.1	34.1	36.7	37.6	36.1	32.3	27.0
AZZURRO	34.4	30.0	27.4	25.8	23.5	25.1	24.8	24.0	23.3	22.5	20.2	17.8

con l'aumentare della distanza dal Sole, e tendono addirittura ad annullarsi per  $\varphi \rightarrow 180^\circ$ . Invero dal grafico sembrerebbe valida soltanto l'ultima parte dell'affermazione. Vi è però da considerare che con ogni probabilità l'andamento della curva per il rosso, in ispecie per  $\varphi \geq 70^\circ$ , è irregolare e non dovuto all'eclisse ma a cause di origine meteorologica. L'irregolarità accennata per  $70^\circ = \varphi \leq 90^\circ$  si è cercato di eliminare, anche se in modo non del tutto oggettivo, graficamente. Ciò che invece non si può eliminare—proprio per ragioni di soggettività—è l'irregolarità che si nota nelle Figg. 2-4 nelle curve relative al rosso per la serie I. Infatti l'anda-

mento di queste curve, e per  $\varphi > 90^\circ$ , fanno attribuire alla luminosità, nell'ora e nell'intervallo considerato, valori superiori a quelli che sarebbero da aspettarsi per un'analogia completa nella serie I e V, e per

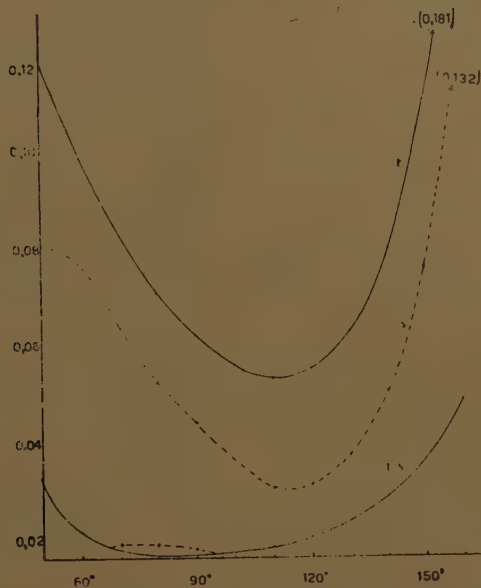


Fig. 8. Andamento, per l'azzurro, delle curve teorica (t), sperimentale (s) e della differenza (t-s) in corrispondenza della fase massima dell'eclisse.

le due zone in esame. In realtà anche per l'azzurro si potrebbe dire che vi è un'identica irregolarità; si vede però che in questo caso essa

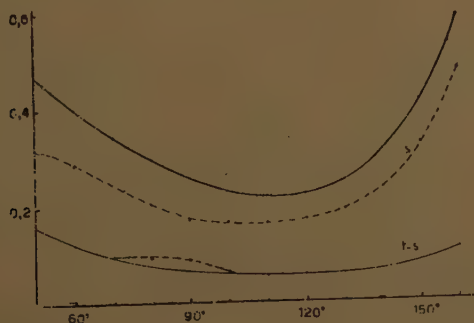


Fig. 9. Andamento, per il rosso, delle curve teorica (t), sperimentale (s), e della differenza (t-s) in corrispondenza della fase massima dell'eclisse.

può senz'altro ritenersi trascurabile. Si può quindi ritenere che nella regione del cielo considerata, nell'ora corrispondente alla serie I, vi era

uno strato diffondente, e in modo preminente per la luce rossa. Si deve notare che nessun fenomeno fu direttamente osservato.

D'altra parte, pur astraendosi dalla miglior regolarità della curva relativa all'azzurro della fig. 10, vi è da considerare che nell'inter-

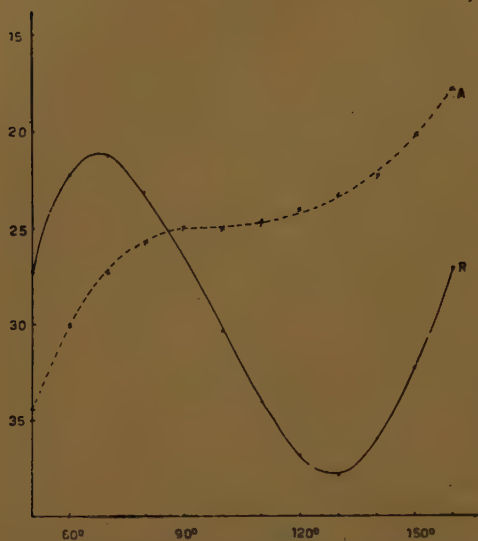


Fig. 10. Andamento della diminuzione percentuale in corrispondenza della fase massima dell'eclisse per l'azzurro (A) e il rosso (R) in funzione dell'altezza della visuale.

vallo  $90^\circ \leq \varphi \leq 120^\circ$  essa mostra una diminuzione percentuale della luminosità, causata dall'eclisse, quasi costante e presso a poco uguale al valore che era da aspettarsi dalla percentuale di superficie solare coperta e dal fatto che anche per le radiazioni monocromatiche il potere radiante del Sole è massimo al centro solare e diminuisce, in modo conosciuto, man mano che si considerano punti più vicini al bordo del disco stesso <sup>4)</sup>.

In conclusione quindi mentre devono rilevarsi delle irregolarità, dovute a cause di origine meteorologica non notate a vista, per  $\varphi \geq 70^\circ$  per il rosso e per  $70^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$  per l'azzurro, soltanto per l'azzurro e per

$90^\circ \leq \varphi \leq 120^\circ$  si ha una diminuzione percentuale della luminosità, causata dall'eclisse, che può ritenersi regolare. Da quanto sopra si è notato nulla impedisce di ritenere — anzi si può dire che vi sono ragioni che inducono a ritenere — che anche per  $\varphi > 120^\circ$  per l'azzurro vi debbono essere state delle cause di origine meteorologica che hanno fatto variare la diminuzione percentuale della luminosità del cielo causata dall'eclisse.

Il lavoro è stato eseguito sotto la direzione del prof. IMBÒ, al quale vanno vivi ringraziamenti. Si sente ancora il dovere di ringraziare i proff. CARRELLI e GIORDANI, che hanno messo a disposizione rispettivamente l'apparecchiatura e il galvanometro ad alta sensibilità; nonchè la Dott.ssa RESCIGNO per i suggerimenti operativi dati.

(1) AMERIO, Mem. R. Acc. Lincei, CCCXI, 321, 1914, e Hand. Astr., Bd. IV, pag. 13.



MISURE DI CAMPO ELETTRICO ATMOSFERICO ESEGUITE IN OCCASIONE  
DELL' ECLISSE PARZIALE DI SOLE DEL 25-2-52

*Nota del dott. Luigi Accardi, presentata dal socio Giuseppe Imbò*

(Adunanza del dì 7 febbraio 1953)

**Sunto.** - Si rende conto dei risultati ottenuti dal confronto della registrazione del campo elettrico atmosferico, relativa all'eclisse parziale di sole del 25-2-1952, con altre registrazioni di giorni precedenti e seguenti.

La misura del campo elettrico atmosferico è stata eseguita nell'istituto di Fisica Terrestre dell'Università di Napoli.

E' stato usato un apparecchio del tipo dinamico con registrazione continua ad inchiostro <sup>1)</sup>.

Si è scelta una sensibilità tale che uno spostamento di 1 mm della penna corrispondesse a 5 V/m e si è assunto come zero il valore del campo elettrico corrispondente a 850 V/m in modo da registrare le variazioni in più o in meno rispetto a detto valore, in quanto si era dedotto da precedenti registrazioni che tale era il valore medio del campo elettrico in tale posto <sup>2)</sup>, nelle ore antimeridiane e durante le giornate senza precipitazioni; d'altra parte la sensibilità scelta permetteva di coprire un campo compreso tra i 400 V/m ed i 1400 V/m, valori mai ecceduti nelle precedenti registrazioni.

Tale sensibilità è stata mantenuta costante durante un lungo periodo precedente e successivo al giorno dell'eclisse e si sono particolarmente curate le registrazioni durante le ore antimeridiane, annotando su ciascuna la nebulosità riscontrata e la velocità del vento, in modo che, pur non essendo il luogo di osservazione il più adatto per la vicinanza del porto e la conseguente azione altamente perturbatrice dei fumi (fluttuazioni dovute a fumo possono superare i 150 V/m), se ne potesse, almeno grosso

<sup>1)</sup> Luigi ACCARDI, *Nuovo apparecchio per la registrazione del campo elettrico atmosferico*. Geofisica pura ed applicata, Vol. 22, fasc. 1-2, 1952.

<sup>2)</sup> La conformazione dell'edificio universitario, sovrastante le costruzioni adiacenti, ed il fatto che la terrazza, di piccola superficie, sulla quale era installato l'apparecchio, si erge ancora sul tutto, apportano delle notevoli variazioni al campo elettrico, tali da far risultare quest'ultimo circa 6 volte più intenso di quello che si misurerebbe in luogo esteso e piano.

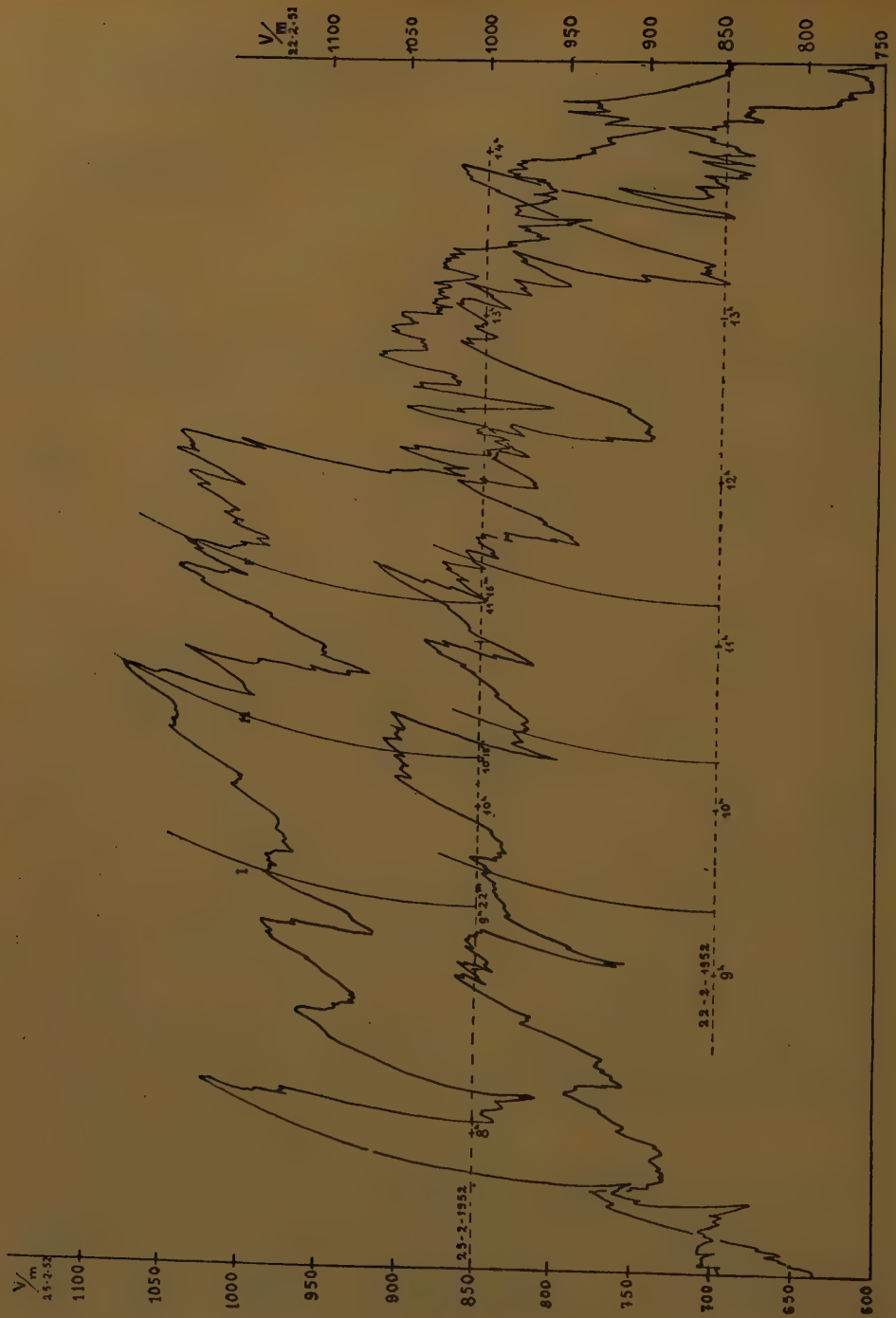


Fig. 1.

modo, conoscere l'influenza sul campo elettrico, tanto da poter poi riconoscere, sulle registrazioni, le alterazioni ad essi dovute.

La registrazione ottenuta il giorno dell'eclisse presenta (vedi fig. 1, registrazione in alto), nella fase crescente di questa, un aumento di c. e. a. raggiungendo un massimo di 1075 V/m coincidente con il massimo dell'eclisse, si ha poi una diminuzione che, a parte variazioni diverse abitualmente riscontrate nelle registrazioni, continua anche dopo la fine dell'eclisse.

Per poter esprimere un qualsiasi giudizio sulla effettiva relazione tra andamento riscontrato ed eclisse si è proceduto ad un confronto con le registrazioni ottenute nei giorni contigui a quelli dell'eclisse.

Dall'analisi sommaria delle varie registrazioni ottenute come già si è detto, con l'apparecchio registratore sempre nelle stesse condizioni per tutte le registrazioni di c. e. a. dei giorni precedenti e seguenti l'eclisse, si sono rilevati, nelle ore antimeridiane, due andamenti tipici, l'uno rela-

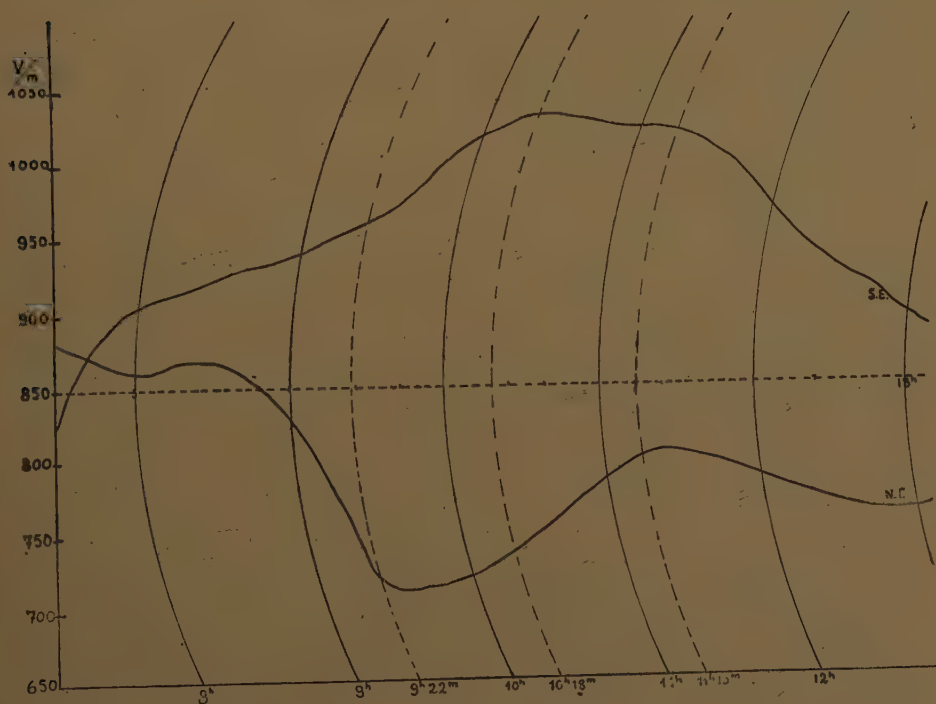


Fig. 2.

tivo ai giorni in cui il vento spirava da N. E., l'altro relativo ai giorni in cui nelle stesse ore il vento spirava da S. E. <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Nelle giornate in cui si sono effettuate le registrazioni la direzione del vento si è mantenuta, nelle ore antimeridiane, costantemente N. E. o S. E.



Si è allora ritenuto opportuno fare una distinzione tra i due andamenti.

In fig. 2 si può osservare l'andamento medio dei valori del c. e. a. ottenuti nelle ore mattutine delle giornate con vento di N. E. (curva N. E.) e l'andamento medio dei valori del c. e. a. ottenuti nelle giornate con vento di S. E. (curva S. E.).

Un raffronto tra l'andamento medio della registrazione relativa al giorno dell'eclisse, in cui nelle ore antimeridiane si aveva vento di S. E. e le curve di fig. 2 ha portato alla conclusione che l'andamento del c. e. a., nella mattinata in cui si ebbe l'eclisse non presenta alcuna sensibile variazione da quello medio delle giornate in cui si ebbe vento di S. E.

In fig. 1 si può confrontare la registrazione ottenuta il giorno dell'eclisse con altra, ottenuta in giornata avente condizioni meteorologiche simili.

# IL GRADO DI POLARIZZAZIONE DEL CIELO MISURATO ALL'OSSERVATORIO VESUVIANO DURANTE L'ECLISSE SOLARE DEL 25/2/1952

*Nota del dott. Lorenzo Casertano, presentata dal socio Giuseppe Imbò*

(Adunanza del dì 7 febbraio 1953)

**Sunto.** — Dalle misure sul grado di polarizzazione eseguite all'Osservatorio Vesuviano in occasione dell'eclisse del 25 febbraio 1952 si ricava che in corrispondenza della fase massima dell'eclisse stesso si è avuto un aumento del grado di polarizzazione per un'altezza ( $\varphi$ ) della visuale data da  $\varphi=70^\circ$ ; quindi una regolare diminuzione per valori di  $\varphi$  varianti da  $80^\circ$  a  $140^\circ$ ; e infine un nuovo aumento regolare con il crescere di  $\varphi$  da  $140^\circ$  a  $160^\circ$ . Non riesce possibile però affermare se tali variazioni sono da attribuirsi soltanto all'eclisse, o se — e in qual misura — anche alle condizioni meteorologiche, che, in base alle ricerche sulla luminosità, sono state riconosciute parzialmente irregolari.

1) Per queste misure è stata adoperata la stessa attrezzatura usata per le ricerche relative alla luminosità del cielo <sup>1)</sup>: sul tubo portante la cellula fotoelettrica al posto del filtro si poneva un nicol al quale si facevano assumere tre posizioni a  $120^\circ$  fra loro.

Le deviazioni ( $d_1, d_2, d_3$ ), lette al galvanometro in corrispondenza delle tre posizioni, possono ritenersi proporzionali alla intensità della luce incidente sulla cellula fotoelettrica, e quindi dai loro valori è possibile ricavare il grado di polarizzazione della luce proveniente dalla zona del cielo nella direzione secondo la quale era diretto il tubo, grado di polarizzazione ( $G$ ) dato — come è noto — da  $G = \frac{N+P}{P}$ , dove  $P$  è l'intensità della luce polarizzata e  $N$  quella della luce naturale.

È facile esprimere in funzione di  $P, N$  e  $\alpha$  (che è l'angolo che il piano di polarizzazione della luce forma con il piano di polarizzazione dell'analizzatore nella prima posizione) le intensità della luce incidente sulla cellula fotoelettrica nelle tre posizioni: intensità che sono proporzionali alle deviazioni al galvanometro. Da queste può ricavarsi il grado di polarizzazione che risulta dato da:

$$[1] \quad G = 2 \frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - d_1 d_2 - d_1 d_3 - d_2 d_3}}{d_1 + d_2 + d_3}$$

2) Anche per queste ricerche sono considerate cinque serie di let-

<sup>1)</sup> V. relazione in questo volume.

ture, delle quali sono riportate, nella Tabella I, i valori delle altezze del Sole ( $\varphi_0$ ) e delle ore relative (h)—ritenuti costanti per ogni serie—all'atto della misura eseguita per  $\varphi = 90^\circ$ .

TABELLA I

SERIE	$\varphi_0$		h	
I	13°	45'	8 <sup>h</sup>	4 <sup>m</sup>
II	25	47	9	20
III	31	11	10	1
IV	35	13	10	39
V	38	15	11	30

Le misure sono state eseguite ancora per altezze ( $\varphi$ ) della visuale poste nel piano verticale del Sole e distanziate fra loro di  $10^\circ$ : per le ragioni già esposte — relativamente al fatto che l'orizzonte non risultava sempre libero, nonchè alla sensibilità del galvanometro — le considerazioni debbono essere limitate alle misure eseguite nell'intervallo  $70^\circ \leq \varphi \leq 160^\circ$ .

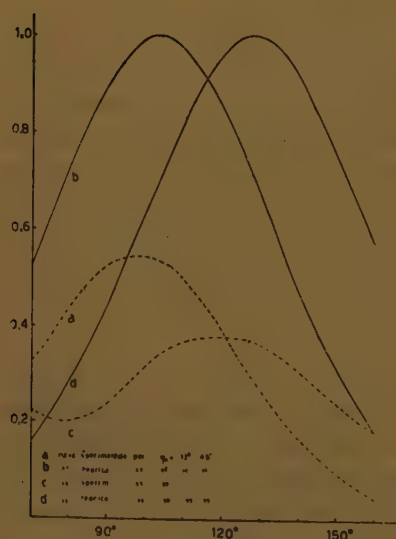


Fig. 1.

I valori del grado di polarizzazione che si ricavano dalla [1] in base alle letture al galvanometro dovrebbero essere confrontati con quelli ottenuti nei giorni contigui o immediatamente vicini al 25 febbraio: ciò non riesce possibile sempre perchè le condizioni meteorologiche degli altri giorni non si son prestate per analoghe misure. Quindi anche in questo caso si deve ricorrere al confronto fra l'andamento delle curve sperimentali con particolari andamenti teorici. Per quel che riguarda il fenomeno della polarizzazione della luce del Sole diffusa dalla volta celeste esso non

risulta finora studiato convenientemente in tutti i suoi aspetti; perciò manca una formula, pienamente soddisfacente, che dia il grado di polarizzazione in funzione delle altezze ( $\varphi$ ) della visuale e ( $\varphi_0$ ) del Sole. Dato lo scopo della ricerca, non conviene indugiare su un'analisi del genere; e per il

metodo di indagine che si può seguire è consentito ritenere accettabili le ammissioni di Lord RAYLEGH, dalle quali—come è noto—si ricava:

$$[2] \quad G = \frac{\text{sen } \phi}{1 + \cos^2 \phi}$$

dove  $\phi$  rappresenta l'angolo che la direzione dei raggi solari forma con la visuale. Riesce così possibile ricavare per le serie I e V, rispettivamente precedente e seguente l'eclisse, i rapporti  $R$  fra i valori del grado di polarizzazione ricavati sperimentalmente e i considerati teorici. Dagli andamenti delle curve  $R(\varphi)$  per le serie I e V è possibile, per interpolazione, calcolare i valori dei rapporti  $R$  per le serie di letture (II, III e IV) eseguite nel corso dell'eclisse. Nella Tabella II sono riportati i valori ottenuti.

Moltiplicando infine i valori  $1/R$  per quelli del grado di polarizzazione ricavati dalla [1] si ottiene il grado di polarizzazione che si sarebbe ricavato se fosse valida la [2]<sup>1)</sup>.

Nella Tabella III sono riportati insieme ai valori ricavati dalla [2] (teorici) quelli ottenuti come si è detto sopra (sperimentali/ $R$ ); nei grafici della Figura 2 sono riportati gli andamenti teorici e sperimentali della variazione del grado di polarizzazione nel corso del giorno per alcune altezze della visuale.

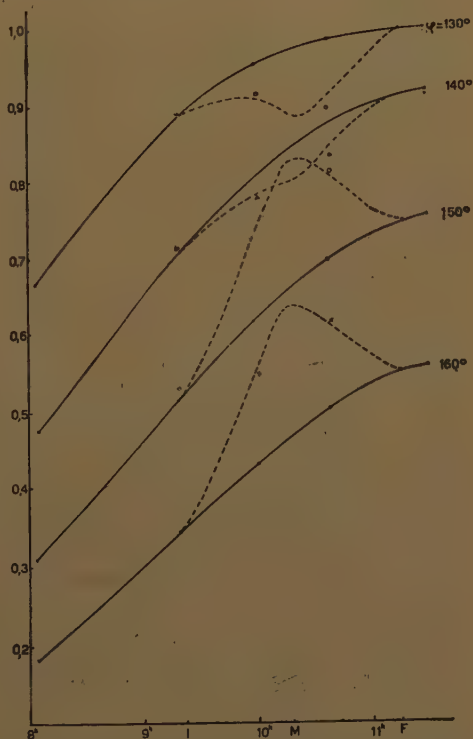


Fig. 2. Le curve a tratto continuo sono le teoriche, le altre quelle sperimentali: i punti relativi alle serie I e V per le teoriche e le sperimentali sono quasi sempre coincidenti.

3) Nel considerare gli effetti dell'eclisse sul grado di polarizzazione bisogna premettere che per la luminosità si è stati portati ad ammettere che i risultati sono stati influenzati da irregolari condizioni meteo-

<sup>1)</sup> Bisognerebbe in effetti correggere i valori teorici moltiplicandoli per  $R$ : ma anche in questo caso è valido quanto detto in proposito nella nota della relazione sulle ricerche eseguite in merito alla luminosità.



logiche. Potendo queste influire anche sul grado di polarizzazione, si ritiene opportuno dare soltanto un breve cenno di quanto si è notato.

Senza voler stabilire confronti per condizioni diverse, riesce utile osservare che mentre nel caso esaminato il grado di polarizzazione è sempre risultato massimo per  $\psi = 90^\circ$ , in occasione invece dell'eclisse del 1905 a detta distanza angolare dal Sole il grado risultò invece nullo secondo le ricerche del PILTSCHIKOFF.

Le variazioni percentuali riferite ai valori teorici del grado

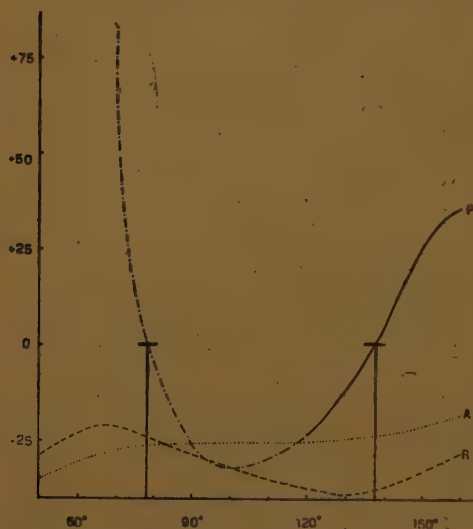


Fig. 3 Andamento della variazione percentuale del grado di polarizzazione (P), nonché della luminosità nell'azzurro (A) e nel rosso (R) in corrispondenza della fase massima dell'eclisse. L'intervallo a tratto continuo della P indica quello in cui la variazione del grado di polarizzazione si è ricavato con miglior approssimazione. I valori negativi rappresentano diminuzione e quelli positivi aumenti.

di polarizzazione in corrispondenza della fase di massimo occultamento della superficie solare (avutasi a  $10^h 18^m$ ) sono riportati nella Tabella IV, dalla quale si ricava il grafico della Fig. 3, in cui si son riportati anche gli andamenti della variazione percentuale della luminosità per le zone rossa e azzurra. La parte tratteggiata della curva P sta a indicare che in quel tratto, nelle relative curve sperimentali, pur risultando chiari gli andamenti qualitativi essi, non possono essere ben definiti in concordanza con gli orari delle fasi principali dell'eclisse.

In conclusione sembra di poter affermare che l'eclisse abbia prodotto un aumento del grado di polarizzazione per  $\varphi = 70^\circ$ ; una regolare diminuzione per valori di  $\varphi$  varianti da  $80^\circ$  a  $140^\circ$ , e quindi dopo una variazione nulla per  $\varphi \approx 140^\circ$  (corrispondente presso a poco a  $\psi = 90^\circ$ )<sup>1)</sup> un nuovo aumento con il crescere di  $\varphi$  da  $140^\circ$  a  $160^\circ$ . Ma pur potendo ancora precisare, specie nell'intervallo  $120^\circ \leq \varphi \leq 160^\circ$ , l'entità delle variazioni cui si è accennato, non riesce possibile sceverare l'influenza avuta dall'eclisse da quella determinata da condizioni meteorologiche irregolari, che, per quanto detto nella relazione già citata, si sono certamente avute.

<sup>1)</sup> Anche il Prof. CIALDEA in occasione dell'eclisse parziale di sole del 9 luglio 1945 (Ric. Scient., Anno 15<sup>o</sup>, 1945) riscontrò una costanza del grado di polarizzazione per  $\psi = 90^\circ$ .

TABELLA II

$\varphi$	I	II	III	IV	V
70°	0.62	0.81	0.95	1.09	1.22
80°	0.61	0.68	0.71	0.74	0.76
90°	0.59	0.59	0.60	0.60	0.58
100°	0.55	0.58	0.61	0.63	0.48
110°	0.50	0.56	0.58	0.61	0.42
120°	0.45	0.50	0.52	0.54	0.38
130°	0.40	0.43	0.45	0.46	0.35
140°	0.36	0.37	0.38	0.38	0.33
150°	0.31	0.32	0.32	0.32	0.32
160°	0.27	0.30	0.30	0.32	0.33

TABELLA III

$\varphi$	I		II		III		IV		V	
	S/R	T	S/R	T	S/R	T	S/R	T	S/R	T
70°	0.531	0.528	0.236	0.321	0.371	0.244	0.322	0.194	0.187	0.161
80°	0.719	0.721	0.425	0.490	0.319	0.395	0.265	0.320	0.265	0.285
90°	0.887	0.893	0.720	0.684	0.521	0.577	0.444	0.501	0.412	0.446
100°	0.994	0.991	0.777	0.870	0.664	0.769	0.584	0.693	0.667	0.634
110°	0.997	0.977	0.875	0.980	0.710	0.927	0.661	0.871	0.870	0.821
120°	0.860	0.855	0.951	0.989	0.900	1.000	0.805	0.984	0.986	0.960
130°	0.670	0.673	0.895	0.886	0.915	0.954	0.894	0.986	1.000	0.998
140°	0.481	0.482	0.721	0.712	0.784	0.812	0.836	0.878	0.921	0.920
150°	0.314	0.314	0.539	0.520	0.706	0.623	0.826	0.701	0.757	0.759
160°	0.183	0.182	0.347	0.346	0.553	0.436	0.618	0.509	0.564	0.566

TABELLA IV

$\varphi$	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°
‰	+82.2	-6.2	-26.5	-31.2	-30.2	-22.8	-12.9	+5.1	+26.6	+35.3

Il lavoro è stato eseguito sotto la direzione del prof. IMBÒ, al quale vanno vivi ringraziamenti. Si sente ancora il dovere di ringraziare i proff. CARRELLI e GIORDANI, che hanno messo a disposizione rispettivamente l'apparecchiatura e il galvanometro ad alta sensibilità; nonchè la dott.ssa RESCIGNO per i suggerimenti operativi dati.

VARIETÀ DETERMINATA DA UNA COPPIA ORDINATA DI IPERSUPERFICIE  
DELL'  $S_r$  COMPLESSO

*Nota del socio ordinario Nicolò Spampinato*

(Adunanza del dì 7 marzo 1953)

**Sunto.** — In questa nota vengono studiate due ipersuperficie dell'  $S_{2r+1}$  complesso, che diciamo *concatenate*, e la loro  $V_{2r+1}$  intersezione, determinata da una *coppia ordinata* di forme in  $r+1$  variabili complesse, di cui la prima non identicamente nulla. Detta varietà intersezione si presenta nello studio della rappresentazione complessa di una ipersuperficie algebrica dell'  $S_r$  *proiettivo biduale* sia nel caso *generale*, sia nel caso *semplice* (in cui i coefficienti dell' equazione di detta ipersuperficie sono numeri complessi, anzichè numeri biduali).

E' bene notare che l' analoga questione per l'  $S_r$  *bicompleso* porta allo studio della *varietà di SEGRE* immagine delle coppie di punti di due ipersuperficie algebriche dell'  $S_r$  complesso, con rette dell'  $S_{2r+1}$ .

L'esposizione è fatta indipendentemente dalla teoria delle algebre che ha dato luogo all' argomento.

1. *Coppie di ipersuperficie concatenate dell'  $S_{2r+1}$*

In uno  $S_{2r+1}$  proiettivo complesso indichiamo con

$$(1) \quad (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{r+1}, y_{r+1})$$

un sistema di coordinate proiettive, con i punti fondamentali  $A_1, A_2, \dots, A_{2r+2}$ . Indichiamo inoltre con  $S_r'$  ed  $S_r''$  gl' iperpazi fondamentali congiungenti, rispettivamente i punti fondamentali con indice dispari:  $A_1, A_3, \dots, A_{2r+1}$ , e con indici pari:  $A_2, A_4, A_{2r+2}$ . Un' ipersuperficie  $V_{r+1}$  dell'  $S_r'$  ( $x_1, \dots, x_{r+1}$ ) di equazione (di grado  $n$ )

$$(2) \quad f(x_1, \dots, x_{r+1}) = 0$$

determina nell'  $S_{2r+1}$  una coppia di ipersuperficie  $V_{2r}^n$  e  $W_{2r}^n$  la prima avente la stessa equazione (2), e la seconda di equazione:

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} y_{r+1} = 0$$

La prima  $V_{2r}^n$  è l' ipercono, di vertice  $S_r''$ , che si ottiene proiettando

la ipersuperficie  $V'_{r-1}$  di  $S'_r$  data. La seconda  $W_{2r}^n$  ammette l' $S_r''$  [vertice di  $V'_{2r}$ ] come  $(n-1)$  plo, perchè la forma a primo membro della (3) è di primo grado rispetto alle variabili  $y_1, \dots, y_{r+1}$  di posto pari nella (1), e quindi un punto  $P''(0, y_1, \dots, 0, y_{r+1})$  di  $S_r''$  annulla tale forma e tutte le sue derivate prime, seconde, ..., fino alle  $(n-2)$ me.

Si noti esplicitamente che *tale proprietà per la  $W_{2r}$  vale pure quando si considera l'equazione:*

$$(3') \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} y + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} y_{r+1} + g(x_1, \dots, x_{r+1}) = 0$$

con  $g(x_1, \dots, x_{r+1})$  forma qualunque di grado  $n$ , anzichè la (3). La (3) risponde al caso semplice in cui la forma  $g(x_j)$  è identicamente nulla.

Diremo che  $V_{2r}^n$  e  $W_{2r}^n$  costituiscono una coppia di ipersuperficie concatenate nel caso generale o semplice secondo che per la seconda si ha l'equazione (3') o (3).

Dalla proprietà notata per la  $W_{2r}^n$  segue che:

Ogni  $S_{r+1}$  della stella di vertice  $S_r''$  (vertice di  $V_{2r}^n$ ) secca la  $W_{2r}^n$  in  $S_r''$  contato  $n-1$  volte ed in un  $S_r$  residuo.

Ne segue che:

La  $W_{2r}^n$  è costituita da  $\infty^r$   $S_r$  generatori ciascuno secante in un  $S_{r-1}$  il suo  $S_r''$   $(n-1)$  plo.

Se diciamo  $(x_1', 0, x_2', 0, \dots, x_{r+1}', 0)$  le coordinate di un punto  $P'$  di  $S_r'$  le equazioni dell' $S_{r+1} = S_r'' P'$ , con gli  $r+2$  parametri omogenei  $\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1}, \lambda$ , sono [tenendo conto che  $S_r''$  congiunge i punti fondamentali  $A_2, A_4, \dots, A_{2r+2}$ ],

$$(4) \quad \begin{cases} x = \lambda x_1', \dots, x_{r+1} = \lambda x_{r+1}' \\ y_1 = \lambda_1, \dots, y_{r+1} = \lambda_{r+1} \end{cases}$$

Ne segue che, sostituendo le (4) nella (3), o nella (3'), si ottiene, dopo aver diviso per il fattore  $\lambda^{n-1}$ , l'equazione dell' $S_r$  generatore della  $W_{2r}^n$  contenuto in detto  $S'_{r+1} = S_r'' P'$ , nelle incognite  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1}, \lambda)$  (che possono assumersi come coordinate del punto variabile in  $S_{r+1}$ ). Si hanno precisamente [in corrispondenza al caso semplice e al caso generale] le equazioni:

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1'} \lambda_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}'} \lambda_{r+1} = 0$$

$$(5') \quad \frac{\partial f}{\partial x_1'} \lambda_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}'} \lambda_{r+1} + g(x_1', \dots, x_{r+1}') \lambda = 0.$$

Dentro  $S_{r+1}$  l' $S_r''$  ha l'equazione  $\lambda = 0$ , perchè per  $\lambda = 0$  dalle (4) si ricava  $x_1 = \dots = x_{r+1} = 0$ , che sono le equazioni di  $S_r''$ . Ora per  $\lambda = 0$  al



(5') ci dà le equazioni (5) che, tenendo conto delle (4), si può scrivere nella forma:

$$(6) \quad \frac{\partial f}{\partial x'_1} y_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x'_{r+1}} y_{r+1} = 0$$

Quest'equazione rappresenta, in ogni caso, l' $S'_{r-1}$  intersezione dell' $S_r$  generatore, di equazione (5) o (5'), della  $W_{2r}^n$ , con il suo  $S_r''$  ( $n-1$ ) plo. Tale iperpiano  $S'_{r-1}$  di  $S_r''$  ( $y_j$ ) ha come coefficienti della sua equazione i valori assunti dalle derivate prime della forma  $f(x_j)$  per  $x_j = x'_j$ , cioè sono i coefficienti dell'iperpiano polare del punto  $P'$  di  $S'_r$  (che determina l' $S'_{r+1} = S_r'' P'$  considerato nella stella di vertice  $S_r''$ ) rispetto alla ipersuperficie di  $S'_r$  di equazione (2). Si ha, pertanto, che l'iperpiano (6) di  $S_r''$  si può considerare come l'omologo nella proiettività  $w$  fra  $S'_r$  ed  $S_r''$  di equazioni:

$$(7) \quad x_1 = y, \dots, x_{r+1} = y_{r+1}$$

di detto iperpiano di  $S'_r$  polare di  $P'$  rispetto alla ipersuperficie (2), assegnata in  $S'_r$ , sia nel caso generale, sia nel caso semplice. Si ha perciò che:

*L' $S'_r$  generatore della  $W_{2r}^n$  appartenente all' $S_{r+1} = S_r'' P'$ , con  $P'$  in  $S'_r$ , secca l' $S_r''$  ( $n-1$ ) plo della  $W_{2r}^n$  nell'iperpiano omologo, nella proiettività  $w$  di equazioni (7) fra l' $S'_r$  ed  $S_r''$  dell'iperpiano polare di  $P'$  rispetto alla ipersuperficie  $V'_{r-1}$ , assegnata in  $S'_r$ , sia nel caso generale sia nel caso semplice.*

Se aggiungiamo ora la condizione che  $P'$  appartenga alla ipersuperficie  $V_r$ , assegnata in  $S'_r$ , avremo in corrispondenza un  $S_{r+1} \equiv S_r'' P'$  generatore dell'ipercono  $V_{2r}^n$  e quindi il corrispondente  $S_r$  generatore della  $W_{2r}^n$  apparterrà alla varietà intersezione della coppia di ipersuperficie concatenate considerate.

Questa intersezione sarà costituita da  $\infty^{r-1}$   $S_r$  generatori appoggiati all' $S'_r$  in  $\infty^{r-1}$  iperpiani che risulteranno gl'iperpiani tangenti alla ipersuperficie  $V'_{r-1}$  di  $S_r''$  di equazione:

$$(8) \quad f(y, \dots, y_{r+1}) = 0$$

omologa della  $V'_{r-1}$  di  $S'_{r-1}$  nella proiettività  $w$  di equazioni (7). Dunque:

*La  $V_{2r-1}$ , di ordine  $n^2$ , intersezione della  $V_{2r}$  con la  $W_{2r}^n$ , sia nel caso semplice, che nel caso generale è costituita da  $\infty^{r-1}$   $S_r$  generatori secanti l' $S_r''$  negli  $\infty^{r-1}$  iperpiani tangenti alla  $V'_{r-1}$  omologa della  $V'_{r-1}$  di  $S'_{r-1}$  nella proiettività  $w$  di equazioni (7).*

Andiamo ora a vedere qual'è il comportamento degli  $\infty^r$   $S_r$  generatori della  $W_{2r}^n$  rispetto all' $S'_r$ . Dato che un tale  $S_r$  generatore è contenuto

in un  $S_{r+} = S_r'' P'$ , avente in comune con  $S_r'$  il solo punto  $P'$  (essendo  $S_r'$  ed  $S_r''$  indipendenti) l'unico punto che detto  $S_r$  generatore può avere con  $S_r'$  è il punto  $P'$ . Ma le coordinate di  $P'$ , come punto di  $S_{r+}$ , sono (per le [4])

$$(9) \quad \lambda = 0, \dots, \lambda_{r+1} = 0, \lambda = 1,$$

e queste coordinate soddisfano sempre all'equazione (5) dell' $S_r$  generatore *nel caso semplice*. Invece soddisfano all'equazione (5') dell' $S_r$  generatore, *nel caso generico* quando, e solo quando, è nullo nella (5') il coefficiente  $g(x', \dots, x_{r+1})$  della variabile  $\lambda$ , cioè quando e solo quando il punto  $P'$  di  $S_r'$  ( $x_i$ ) appartiene alla ipersuperficie di equazione

$$(10) \quad g(x, \dots, x_{r+1}) = 0.$$

Si ha perciò:

a) *Nel caso semplice tutti gli  $\infty^r S_r$  generatori della  $W_{2r}^n$  secano in un punto l' $S_r'$ .*

b) *Nel caso generico solo  $\infty^{r-1}$  degli  $\infty^r S_r$  generatori della  $W_{2r}^n$  secano l' $S_r'$ ; e gli  $\infty^{r-1}$  punti di appoggio in  $S_r'$  sono tutti e soli i punti della ipersuperficie di equazione (10).*

Si noti esplicitamente che dalla suddetta proprietà nel caso semplice segue che:

I) *La  $W_{2r}^n$  di equazione (3) (caso semplice) risulta costituita dagli*

*$\infty^r S_r$  che si ottengono congiungendo ogni punto  $P'$  di  $S_r'$  con l'iperpiano di  $S_r''$  polare rispetto alla  $V_{r-1}'$  del punto  $P''$  di  $S_r''$  omologo di  $P'$  nella proiettività  $w$  di equazioni (7).*

II) *L'intersezione  $V_{2r-}$ , di ordine  $n^2$ , della  $V_{2r}^n$  con la  $W_{2r}^n$  nel caso semplice è costituita dagli  $\infty^{r-1} S_r$  che si ottengono congiungendo ogni punto  $P'$  della  $V_{r-}$  con l'iperpiano tangente alla  $V_r$  nel punto  $P''$  omologo di  $P'$  nella proiettività  $w$  di equazioni (7) fra  $S_r'$  ed  $S_r''$ .*

## 2. Caso singolare.

Nel caso che il punto  $P'$  di  $S_r'$  appartenga alla  $V_{r-1}'$  di equazione (2), e sia inoltre un punto singolare per questa ipersuperficie, e quindi sia:

$$(11) \quad \frac{\partial f}{\partial x'_1} = \frac{\partial f}{\partial x'_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x'_{r+1}} = 0,$$

l'equazione (6) risulta identicamente soddisfatta, cioè nel caso semplice tutto l' $S_{r+1} = S_r'' P'$  appartiene alla  $W_{2r}^n$ , mentre nel caso generale la (5') si riduce a:

$$(5'') \quad g(x', \dots, x_{r+1}) \lambda = 0$$

In questo caso se  $P'$  non appartiene (oltre che a  $V_{r-1}'$ ) alla ipersuperficie di equazione (10), la (5'') equivale all'equazione  $\lambda = 0$  che rappresenta, dentro l' $S_{r+1}'$ , l' $S_r''$ . Se invece  $P'$  appartiene alla ipersuperficie (10) la (5''), e quindi la (5') risulta identicamente soddisfatta, e, come nel caso semplice, tutto l' $S_{r+1}'$  appartiene alla  $W_{2r}^n$ .

Se  $P'$  per la  $V_{r+1}'$  è singolare s—plo, l' $S_{r+1}' = S_r'' P'$  risulta singolare s—plo per l'ipercono  $V_{2r}^n$ , che si ottiene proiettando la  $V_{r-1}'$  da  $S_r''$ . Ne segue che:

*Se  $P'$  è un punto singolare della  $V_{r-1}'$ , di molteplicità  $s$ , alla  $V_{2r-1}$  intersezione delle due ipersuperficie concatenate  $V_{2r}$  e  $W_{2r}$ , appartiene [sia nel caso semplice, sia nel caso generale se  $P'$  appartiene anche alla ipersuperficie (10)] tutto l' $S_{r+1}' = S_r'' P'$  come s—plo almeno.*

NOTA. Si osservi esplicitamente che nel caso  $r=2$ , essendo  $2r-1=r+1$  lo spazio  $S_3 = S_2'' P'$  si stacca dalla  $V_3$  intersezione delle due ipersuperficie concatenate  $V_4^n$  e  $W_4^n$  dell' $S_5$ . Ciò è messo in evidenza nella nota: *Le varietà dell' $S_5$  complesso determinate da una curva algebrica piana* (dove è trattato il primo caso semplice, per  $r=2$ ). (LA RICERCA, Anno III-1952, Istituto Editoriale del Mezzogiorno, Napoli.) E' dimostrato, in particolare, in tal caso, che: *se  $P'$  è singolare con la molteplicità 2 l' $S_3 = S_2'' P'$  si stacca dalla  $V_3$  con la molteplicità 2 o 3 secondo che il punto doppio  $P'$  per la curva  $V_1'$  è a tangenti distinte o coincidenti (n° 2 della nota citata).*

### 3. Caso in cui coincidono le due ipersuperficie assegnate in $S_r'$

Nel caso in cui la forma  $g(x_j)$  non è identicamente nulla, ma equivalente alla forma  $f(x_j)$ , cioè nel caso in cui coincidono le due ipersuperficie assegnate in  $S_r'$ , risulterà che il sistema delle due equazioni (2) e (3) sarà equivalente al sistema delle (2) e (3'), perchè alla (3') possiamo sostituire, nel sistema, la sua differenza con la (2) dopo aver moltiplicato il primo membro di questa per quel fattore, non nullo,  $h$  che dà  $hf(x_j) = g(x_j)$ ; e tale differenza ci dà la (3). Ne segue che:

*La varietà  $V_{2r-1}$  intersezione delle due ipersuperficie concatenate  $V_{2r}$  e  $W_{2r}$ , nel caso in cui la forma  $g(x_j)$  è equivalente alla forma  $f(x_j)$ , coincide con la  $V_{2r-1}$  ottenuta nel caso in cui la forma  $g(x_j)$  è identicamente nulla (caso semplice).*

4. *Equazioni parametriche della  $V_{2r-1}$  nel caso generale.*

Consideriamo le equazioni parametriche

$$(11) \quad x_i = \rho x'_i, \dots, x_{r+1} = \rho x'_{r+1}, y_i = \sigma y''_i, \dots, y_{r+1} = \sigma y''_{r+1}$$

di una retta  $P'P''$ , appoggiata ad  $S'_r$  ed  $S''_r$  nei due punti  $P' (x'_1, 0, \dots, x'_{r+1}, 0)$  e  $P'' (0, y''_1, \dots, 0, y''_{r+1})$ . Sostituendo le (11) nel sistema delle equazioni (2) e (3') si ha:

$$(12) \quad \begin{cases} \rho^n f(x'_1, \dots, x'_{r+1}) = 0 \\ \rho^{n-1} \sigma \left( \frac{\partial f}{\partial x'_1} y''_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x'_{r+1}} y''_{r+1} \right) + \rho^n g(x'_1, \dots, x'_{r+1}) = 0 \end{cases}$$

Ne segue che la retta  $P'P''$  seca la  $V_{2r-1}$ , intersezione delle due ipersuperficie concatenate  $V_{2r}$  e  $W_{2r}$ , nel punto  $P''$ , contato  $n(n-1)$  volte, e nel punto rispondente ai valori dei due parametri omogenei  $\rho$  e  $\sigma$  soddisfacenti al sistema lineare omogeneo in  $\rho$ , e  $\sigma$ , avente per determinante dei coefficienti il determinante:

$$(13) \quad D = \begin{vmatrix} f(x'_1, \dots, x'_{r+1}) & 0 \\ g(x'_1, \dots, x'_{r+1}) & \frac{\partial f}{\partial x'_1} y''_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x'_{r+1}} y''_{r+1} \end{vmatrix}.$$

Se  $D \neq 0$  il sistema (12) non ammette altra soluzione oltre quella  $n(n-1)$  pla  $\rho=0$ , e  $\sigma$  qualunque. In tal caso la retta ha in comune con la  $V_{2r-1}$  il solo punto  $P''$ . Per esservi un ulteriore punto intersezione occorre che sia  $D=0$ ; cioè che sia:

$$(14) \quad f(x'_1, \dots, x'_{r+1}) \left( \frac{\partial f}{\partial x'_1} y''_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x'_{r+1}} y''_{r+1} \right) = 0.$$

a) Se  $P'$  non appartiene alla  $V'_{r-1}$ , deve essere nullo il secondo secondo fattore, cioè  $P''$  deve appartenere all'iperpiano omologo in  $w$  dell'iperpiano polare di  $P'$  rispetto a  $V'_{r-1}$ . In tal caso i valori di  $\rho$  e  $\sigma$  rispondenti all'ulteriore punto intersezione della  $V_{2r-1}$  con la retta  $P'$  e  $P''$  sono  $\rho=0$  e  $\sigma \neq 0$  che rispondono al punto  $P''$ .

b) Se  $P'$  appartiene  $V'_{r-1}$  (allora  $D$  risulta nullo) ed i valori di  $\rho_1$  e  $\sigma_1$  soddisfacenti al sistema sono dati, a meno di un fattore, dalle formule

$$(15) \quad \begin{cases} \rho_1 = \frac{\partial f}{\partial x'_1} y''_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x'_{r+1}} y''_{r+1} \\ \sigma_1 = -g(x'_1, \dots, x'_{r+1}). \end{cases}$$

Questi valori  $\rho_1$  e  $\sigma_1$  di  $\rho$  e  $\sigma$  sostituiti nelle (11) ci danno, in tal caso,



un altro punto della  $V_{2r}$ , appartenente alla retta  $P'P''$ . Tale punto, diciamo  $P_1$ , ha quindi le coordinate date da:

$$(16) \quad x_i = \rho_1 x'_i, \dots, x_{r+1} = \rho_1 x'_{r+1}, y_i = \sigma_1 y''_i, \dots, y_{r+1} = \sigma_1 y''_{r+1},$$

con le  $\rho_1, \sigma_1$  date dalle (15), e con la condizione che deve essere soddisfatta la relazione:

$$(17) \quad f(x'_1, \dots, x'_{r+1}) = 0,$$

che lega le coordinate di  $P'$  dovendo  $P'$  appartenere alla  $V_{r-1}$ . Si osservi ora un punto  $P_1$  qualunque dell'  $S_{2r+1}$ , fuori di  $S'_r$  e di  $S''_r$ , appartiene sempre ad una retta  $P'P''$  congiungente due punti  $P'$  e  $P''$  di  $S'_r$  ed  $S''_r$ . Sicchè con le (16) al variare delle  $x'_j$  ed  $y''_j$  soddisfacenti alla condizione (17) si devono ottenere *tutti* i punti della  $V_{2r-1}$ .

Sicchè si ha:

I) *Le equazioni parametriche (16), tenendo conto delle posizioni (15), con le due (r+1) ple di parametri omogenei ( $x'_1, \dots, x'_{r+1}$ ) e ( $y''_1, \dots, y''_{r+1}$ ) con le  $x'_j$  legati dall'equazione algebrica (17), rappresentano la  $V_{2r-1}$  intersezione delle due ipersuperficie concatenate  $V_{2r}$  e  $W_{2r}$  nel caso generale.*

#### 5. Equazioni parametriche della $V_{2r-1}$ nel caso semplice.

Nel caso semplice, sostituendo le (11) nel sistema delle due equazioni (2) e (3), si ha:

$$(18) \quad \begin{cases} \rho^n f(x'_1, \dots, x'_{r+1}) = 0 \\ \rho^{n-1} \sigma \left( \frac{\partial f}{\partial x'_1} y''_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x'_{r+1}} y''_{r+1} \right) = 0 \end{cases}$$

Ne segue che la retta  $P'P''$ , in questo caso, oltre al punto  $P''$ , contato  $n(n-1)$  volte, seca la  $V_{2r-1}$  ulteriormente quando il sistema:

$$(19) \quad \begin{cases} \rho f(x'_1, \dots, x'_{r+1}) = 0 \\ \sigma \left( \frac{\partial f}{\partial x'_1} y''_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x'_{r+1}} y''_{r+1} \right) = 0 \end{cases}$$

ammette delle soluzioni  $(\rho, \sigma)$  non entrambe nulli.

a) Se  $P'$  non appartiene a  $V'_{r-1}$ , e  $P''$  non appartiene all'iperpiano  $S''_{r-1}$  di  $S''_r$  omologo in  $w$  dell'iperpiano polare di  $P'$  rispetto a  $V'_{r-1}$ , la retta  $P'P''$  non seca ulteriormente la  $V_{2r-1}$ , perchè le (19) ammettono la sola soluzione  $\rho=0, \sigma=0$ . Se  $P'$  non appartiene a  $V'_{r-1}$ , e  $P''$  appartiene ad

$S''_{r-1}$ , il sistema (19) ammette le sole soluzioni  $\sigma$  qualunque e  $\rho=0$ , rispondenti al punto  $P''$ .

b) Se  $P'$  appartiene a  $V'_{r-1}$  e  $P''$  non appartiene ad  $S''_{r-1}$ , il sistema (19) ammette le sole soluzioni  $\rho$  qualunque e  $\sigma=0$ , rispondenti, al punto  $P'$ .

c) Se infine  $P'$  appartiene a  $V'_{r-1}$  e  $P''$  appartiene ad  $S''_{r-1}$ , il sistema (19) risulta identicamente soddisfatto e quindi tutta la retta  $P' P''$  appartiene alla  $V_{2r-1}$ , e tutto l'  $S_r=S''_{r-1} P'$  apparterrà alla  $V_{2r-1}$ , cioè sarà uno degli  $S_r$  generatori della  $V_{2r-1}$ , di cui all' ultima proposizione del n° 1. Si ha pertanto ;

II) *Le equazioni parametriche (11) con la coppia di parametri omogenei  $(\rho, \sigma)$  e le due  $(r+1)$  ple di parametri omogenei  $(x', \dots, x'_{r+1})$  e  $y', \dots, y'_{r+1})$ , legati dalle due equazioni algebriche :*

$$(20) \quad f(x'_1, \dots, x'_{r+1}) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x'_1} y''_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x'_{r+1}} y''_{r+1} = 0$$

*rappresentano la  $V_{2r-1}$  intersezione delle due ipersuperficie concatenate  $V^n_{2r}$  e  $W^n_{2r}$ , nel caso semplice.*

SULLA STABILITÀ DEI MOTI MEROSTATICI  
DI PARTICOLARI SISTEMI ANOLONOMI

*Nota del dott. Luigi Salvadori, presentata dal socio Carlo Tolotti*

(Adunanza del dì 7 febbraio 1953)

**Sunto.** — Vengono forniti dei criteri di stabilità e di instabilità per i moti merostatici di una particolare classe di sistemi anOLONOMI esaminando, a titolo d'esempio, la stabilità del puro rotolamento di un disco su superficie sferica soggetto a forza centrale.

*Introduzione.*

Nella presente Nota segnavo una particolare classe di sistemi anOLONOMI per i cui moti merostatici è possibile fornire dei criteri di stabilità e di instabilità analoghi ai noti criteri di DIRICHLET e di LIAPOUNOFF riguardanti le posizioni d'equilibrio dei sistemi olonomi.

Precisamente nel § 1, dopo aver scritte le condizioni che caratterizzano la suddetta classe di sistemi anOLONOMI, mostro che le corrispondenti equazioni dinamiche costituiscono il seguente sistema, involgente accanto alle caratteristiche cinetiche  $e_1, e_2, \dots, e_{n-m}$  ( $m < n$ ) una soltanto,  $q$ , delle  $n$  coordinate lagrangiane

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 \dot{e}_1 + \sum_{k=2}^{n-m} \gamma_{k1} e_k \dot{e}_k = \frac{dU}{dq} \\ A_h \dot{e}_1 - \sum_{k=2}^{n-m} \gamma_{k1} e_k \dot{q} = 0 \quad (h = 2, 3, \dots, n-m) \\ \dot{q} = e_1, \end{array} \right.$$

ove  $A_1, A_2, \dots, A_{n-m}$  sono i coefficienti della forza viva ridotta alla forma canonica

$$(2) \quad T^* = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n-m} A_{\alpha} e_{\alpha}^2,$$

$U$  è il potenziale della sollecitazione attiva dipendente soltanto da  $q$  ed

infine  $\gamma_{k1h}$  sono certe funzioni di  $q$  per la cui completa definizione rimando al citato § 1.

Di tale sistema considero la più generale soluzione statica caratterizzata dai valori costanti

$$(3) \quad q = q_0, \quad e_1 = \dot{q} = 0, \quad e_h = e_h^o \quad (h = 2, 3, \dots, n-m)$$

soddisfacenti per le stesse (1) alla condizione

$$(4) \quad \sum_{k=2}^{n-m} \gamma_{k1h}^o e_h^o e_k^o = \left( \frac{dU}{dq} \right)_o,$$

in cui l'indice  $o$  sta a denotare che i relativi elementi vanno calcolati per  $q = q_0$ . Il corrispondente moto del sistema materiale è naturalmente me-rostatico perchè i rimanenti  $n-1$  parametri lagrangiani sono in generale variabili col tempo.

Della stabilità di questo moto, ridotta ai parametri  $q, e_1, e_2, \dots, e_{n-m}$ , ma non differente dalla stabilità incondizionata della soluzione (3) del sistema (1), mi occupo appunto nel § 2.

Ivi precisamente considero la funzione

$$(5) \quad \overline{W} = U - \frac{1}{2} \sum_{h=2}^{n-m} A_h \overline{e_h}^2$$

dove le  $\overline{e_h}(q)$  denotano la soluzione, verificante le condizioni iniziali

$$(6) \quad e_h(q_0) = e_h^o \quad (h = 2, 3, \dots, n-m),$$

del sistema di forma normale nelle  $n-m-1$  funzioni incognite  $e_h(q)$

$$(7) \quad \frac{de_h}{dq} = \frac{1}{A_h} \sum_{k=2}^{n-m} \gamma_{k1h} e_k \quad (h = 2, 3, \dots, n-m),$$

ottenuto dalle (1) dividendo ambo i membri di queste equazioni per

$$A_h \dot{q}.$$



Dopo aver riconosciuto che la funzione (5) è stazionaria nel punto  $q_0$ , dimostro i seguenti criteri di stabilità ed instabilità:

I. Se  $\overline{W}$  ha in  $q_0$  un massimo effettivo, la soluzione (3) del sistema (1) è stabile.

II. Se  $\overline{W}$  ha in  $q_0$  un minimo riconoscibile dal segno ivi assunto dalla sua seconda derivata, la soluzione (3) del sistema (1) è instabile.

A conclusione del suddetto § 2, nel n. 7, do forma esplicita alle condizioni di massimo e minimo della funzione (5), il che è utile per la pratica applicazione dei suddetti criteri.

Tra i sistemi considerati nel presente lavoro rientra il disco rotolante su una superficie sferica sotto l'azione di una forza centrale. Allo scopo di mostrare su un esempio concreto l'utilità dei risultati ora esposti, ricerco appunto, nel § 3, le condizioni di stabilità ed instabilità del puro rotolamento di tale disco nel piano di una circonferenza massima della sfera. Come caso limite ritrovo i risultati riguardanti la stabilità, in senso rigoroso, del puro rotolamento di un disco pesante su un piano scabro, dati dal Vranceanu <sup>1)</sup>.

### § 1. — Specificazione della classe di sistemi anolonomi considerata.

1. Un sistema materiale  $S$ , a vincoli bilaterali, lisci ed indipendenti dal tempo, venga riferito ad una  $n$ -pla di coordinate lagrangiane  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , scelte in modo da tener conto di tutti i vincoli onolomi. I rimanenti vincoli saranno supposti anolonomi e tradotti dalle  $m < n$  equazioni lineari tra le  $\dot{q}$ , non illimitatamente integrabili ed indipendenti

$$(8) \quad \sum_{r=1}^n b_{ir} \dot{q}_r = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

in cui le  $b_{ir}$  sono funzioni di  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .

Come è ben noto si può dare delle (8) una risoluzione parametrica esprimendo le più generali  $\dot{q}$  soddisfacenti alle (8) come funzioni lineari

<sup>1)</sup> G. VRANCEANU, *Sulla stabilità del rotolamento di un disco*, Rend. Acc. Lincei, vol. XXXIII, 1° sem. 1924, pagg. 383-388.

di  $n-m$  parametri  $e_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n-m$ ) detti caratteristiche cinetiche. A tal uopo basta definire le  $e_\alpha$  mediante  $n-m$  relazioni lineari, indipendenti tra loro e dalle (8), del tipo

$$(9) \quad \sum_{r=1}^n b_{n+\alpha, r} \dot{q}_r = e_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n-m).$$

Con ciò alle equazioni dei vincoli anolonomi si viene ad assegnare la forma

$$(10) \quad \dot{q}_r = \sum_{\alpha=1}^{n-m} \eta_{r\alpha} e_\alpha \quad (r=1, 2, \dots, n),$$

ove  $\eta_{r\alpha}$  è il reciproco dell'elemento  $b_{m+\alpha, r}$  nel determinante dei coefficienti del sistema formato con le equazioni (8), (9).

Sia  $T^*$  l'aspressione in termini delle  $q$ ,  $e$ , assunta dalla forza viva

$$(11) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^n a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s \quad (a_{rs} = a_{sr}),$$

in virtù delle (3).

Il moto di  $S$  è retto dalle (10) e dalle  $n-m$  equazioni di Volterra

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial e_\alpha} - \sum_{r=1}^n \eta_{r\alpha} \frac{\partial T^*}{\partial q_r} + \sum_{\beta=1}^{n-m} \gamma_{\lambda\alpha\beta} e_\lambda e_\beta = \\ = \sum_{r=1}^{n-m} \eta_{r\alpha} Q_r \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n-m), \end{aligned}$$

avendo designato con  $Q_r$  le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva, funzioni di  $q_1, q_2, \dots, q_n$  e con  $\gamma_{\lambda\alpha\beta}$   $(n-m)^3$  funzioni delle  $q$ , definite dalle formule

$$\gamma_{\lambda\alpha\beta} = \sum_{s=1}^n a_{ss} \eta_{s\lambda} \sum_{r=1}^n \left( \eta_{r\alpha} \frac{\partial \eta_{s\beta}}{\partial q_r} - \eta_{r\beta} \frac{\partial \eta_{s\alpha}}{\partial q_r} \right) \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n-m)$$

e costituenti, come si vede, un sistema emisimmetrico rispetto agli indici  $\alpha, \beta$ .

2. — Per il sistema anolonomo del n. 1 siano verificate, con opportuna scelta delle coordinate lagrangiane, le seguenti particolari circostanze :

a) Nelle equazioni dei vincoli anolonomi non figuri la velocità lagrangiana  $\dot{q}_1$ .

b) La forza viva  $T$  abbia la forma

$$T = \frac{1}{2} A_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{u,v}^{n-m} a_{uv} \dot{q}_u \dot{q}_v$$

con  $A_1$  costante; cioè nella (11) sia  $a_{11}=A_1$  ed  $a_{1s}=0$  per  $s=2, 3, \dots, n$ .

Ciò ammesso, pur di prendere  $e_1$  coincidente con  $\dot{q}_1$  e le rimanenti caratteristiche funzioni lineari delle sole velocità  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ ,

$$(9') \quad e_h = \sum_{u=1}^n b_{m+h,u} \dot{q}_u \quad (h=2, 3, \dots, n-m),$$

le (10) diventano

$$(10') \quad \begin{cases} \dot{q}_1 = e_1 \\ \dot{q}_u = \sum_{h=2}^{n-m} \eta_{uh} e_h \end{cases} \quad (u=2, 3, \dots, n).$$

Stante poi le (10'), una volta posto

$$A_{hk} = \sum_{u,v}^{n-m} a_{uv} \eta_{uh} \eta_{vk} \quad (h, k=2, 3, \dots, n-m),$$

sarà

$$T^* = \frac{1}{2} A_1 e_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{h,k}^{n-m} A_{hk} e_h e_k.$$

Segnaliamo ora le identità

$$(13) \quad \gamma_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n-m),$$

che ci saranno utili tra breve e che si controllano in base alle espressioni dei coefficienti  $\eta_{r\alpha}$  deducibili dalle (10').

Osserviamo infine che essendo la seconda parte di  $T^*$  una forma quadratica definita positiva, scegliendo più particolarmente le (9) è possibile,

in infiniti modi, dare ad essa la forma canonica  $\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n-m} A_h e_h^2$ , con i coefficienti  $A_h$  costanti. In tal guisa potremo assumere per  $T^*$  l'espressione (2).

A questo punto completeremo il quadro delle ipotesi a), b) supponendo inoltre che:

c) Le quantità  $\gamma_{\lambda\alpha\beta}$  siano funzioni soltanto di  $q_1$  e nulle quando è simultaneamente  $\lambda, \alpha, \beta = 2, 3, \dots, n-m$ .

d) La sollecitazione attiva sia conservativa ed abbia per potenziale una funzione del solo parametro  $q_1$ .

Allora anche la componente  $Q_1$  della sollecitazione è funzione soltanto di  $q_1$ , mentre le rimanenti componenti sono tutte nulle.

3. — Quando tutte le ipotesi fatte sono verificate, posto per semplicità  $q = q_1$  e ricordando le (2), (13) ed i suddetti valori dei coefficienti  $\eta_{r\alpha}$ , le equazioni di Volterra e la (10<sub>1</sub>') si riducono al sistema (1), involgente unicamente le  $n-m$  funzioni incognite  $q, e_1, e_2, \dots, e_{n-m}$ . Una volta che tali equazioni siano state integrate, le (10<sub>2</sub>') si potranno infine ridurre ad un sistema nelle  $n-1$  incognite residue  $q_2, \dots, q_n$ .

## § 2. — Criteri di stabilità e di instabilità dei moti merostatici.

4. — Presa in esame la più generale soluzione statica (3) del sistema (1), dimostriamo che la funzione  $\bar{W}(q)$  data dalla (5) è stazionaria nel punto  $q_0$ .

Si ha infatti

$$\frac{d\bar{W}}{dq} = \frac{dU}{dq} - \sum_{h=1}^{n-m} A_h e_h \frac{d\bar{e}_h}{dq}$$

e quindi per le (7)

$$(14) \quad \frac{d\bar{W}}{dq} = \frac{dU}{dq} - \sum_{h=1}^{n-m} \gamma_{k1h} e_h \bar{e}_h$$



da cui in virtù delle (6)

$$\left(\frac{d\bar{W}}{dq}\right)_0 = \left(\frac{dU}{dq}\right)_0 - \sum_2^{n-m} \gamma_{hk}^0 e_h^0 e_k^0.$$

Dopo ciò la (4) fornisce appunto

$$\left(\frac{d\bar{W}}{dq}\right)_0 = 0.$$

5. — Passiamo ora a dimostrare il criterio I di stabilità, enunciato nell'introduzione.

Supposto a tale scopo che  $\bar{W}$  abbia in  $q_0$  un massimo effettivo, consideriamo l'integrale generale del sistema (7) nella forma

$$E_h(q, e_2, e_3, \dots, e_{n-m}) = c_h \quad (h=2, 3, \dots, n-m),$$

cioè risoluto rispetto alle  $n-m-1$  costanti arbitrarie  $c_2, c_3, \dots, c_{n-m}$ . Le  $\bar{e}_h$  ( $h=2, 3, \dots, n-m$ ) allora, una volta posto

$$\bar{e}_h = E_h(q_0, e_2^0, e_3^0, \dots, e_{n-m}^0) \quad (h=2, 3, \dots, n-m),$$

potranno, in virtù delle (6), essere riguardate come sistema di funzioni definite implicitamente dalle equazioni

$$(16) \quad E_h(q, e_2, e_3, \dots, e_{n-m}) = \bar{e}_h \quad (h=2, 3, \dots, n-m).$$

Rilevando a questo punto che  $\bar{W}(q)$  si può pensare ottenuta dalla funzione

$$(16) \quad W(q, e_2, e_3, \dots, e_{n-m}) = U - \frac{1}{2} \sum_2^{n-m} A_h e_h^2$$

qualora si ponga in questa  $e_h = \bar{e}_h$ , è immediato riconoscere che, nell'ipotesi fatta,  $W$  ha nel punto  $q_0, e_2^0, e_3^0, \dots, e_{n-m}^0$  un massimo effettivo condizionato alle (15). La funzione  $H = T^* - U$ , che per le (2), (16) può anche scriversi

$$H = \frac{1}{2} A_1 \dot{q}^2 - W,$$

avrà invece nel punto  $M$  di coordinate  $q=q_0$ ,  $\dot{q}=0$ ,  $e_h=e_h^0$  ( $h=2,3,\dots,n-m$ ) un minimo effettivo condizionato alle stesse (15).

Indicato con  $H_M$  il valore del minimo suddetto, avremo che, allorquando sono verificate le (15), sarà

$$(17) \quad H_P > H_M$$

purchè, detto  $\delta$  un numero positivo convenientemente piccolo, il punto  $P(q, \dot{q}, e_h)$  sia non esterno alla ipersfera di centro  $M$  e raggio  $\delta$ , senza però coincidere con  $M$ .

Prendiamo ora in esame la funzione

$$F = (H - H_M)^2 + \sum_{h=2}^{n-m} (E_h - \bar{e}_h)^2$$

per tutti i punti  $Q$  giacenti sulla ipersfera  $\Sigma_\mu$  di centro  $M$  ed avente per raggio un numero  $\mu$  qualsiasi minore di  $\delta$ . I corrispondenti valori di  $F$  saranno tutti non nulli perchè quando si annullano tutti i termini  $E_h - \bar{e}_h$  non può annullarsi  $H - H_M$  stante (17); onde il minimo ammesso dalla  $F$  in virtù della sua continuità, al variare di  $Q$  sulla ipersfera suddetta, è certamente un numero  $\sigma$  maggiore di zero. Essendo poi  $F_M = 0$  esiste per la continuità di  $F$  un numero  $\eta < \mu$  tale che in ogni punto non esterno alla ipersfera  $\Sigma_\eta$  di centro  $M$  e raggio  $\eta$  si abbia

$$F < \sigma.$$

Si prenda uno stato iniziale di moto rappresentato da un punto  $P_1(q_1, \dot{q}_1, e_h^{(1)})$  non esterno a  $\Sigma_\eta$ ; allora poichè durante tutto il moto si mantengono costanti sia  $H$  per l'integrale delle forze vive, che le funzioni  $E_h$ , anche  $F$  sarà costante e quindi sempre inferiore a  $\sigma$ . Ne segue che il punto rappresentativo  $P$  dello stato di moto non potrà mai raggiungere la ipersfera  $\Sigma_\mu$  (e quindi mai uscirne) giacchè allora risulterebbe

$$F \geq \sigma.$$

Resta pertanto assodata la stabilità del moto.

6. — Dimostriamo adesso il criterio II di instabilità, enunciato nella introduzione.

Supposto stabile la soluzione (3), consideriamo i particolari moti per quali sia inizialmente

$$(18) \quad q=q_1, \quad \dot{q}=\dot{q}_1=0, \quad e_h=\bar{e}_h(q_1) \quad (h=2, 3, \dots, n-m).$$

Per tale classe di movimenti l'integrale delle forze vive fornisce, stante le (2), (5), l'equazione

$$\frac{1}{2} A_1 \dot{q}^2 - \bar{W} = cost.,$$

da cui, per derivazione rispetto al tempo e limitandoci ad un intervallo di tempo in cui continua ad essere  $\dot{q} \neq 0$ , si ha

$$A_1 \ddot{q} - \frac{d\bar{W}}{dq} = 0.$$

Ma la stabilità della (3) implica che pur di prendere  $q_1$  abbastanza prossimo a  $q_0$ , (ciò che poi rende i valori  $e_h(q_1)$  abbastanza prossimi ai valori  $e_h^0$ ) e  $q$  abbastanza piccolo, la differenza  $x = q - q_0$  si mantenga durante tutto il moto, ed in valore assoluto, piccola quanto si vuole. Trascurando allora infinitesimi di ordine superiore rispetto ad  $x$  si ottiene infine, come equazione delle piccole oscillazioni, definite dalle condizioni iniziali (18), attorno alla soluzione (3)

$$A_1 \ddot{x} - \left( \frac{d^2 \bar{W}}{dq^2} \right)_0 x = 0.$$

Dalla ben nota forma di questa discende immediatamente come conseguenza necessaria della stabilità di (2) l'impossibilità per  $\bar{W}$  di avere in  $q_0$  derivata seconda positiva.

7. — Si riconosce subito con l'applicazione diretta dei criteri I, II che la soluzione (3) è stabile o instabile a seconda che sia

Derivando la (14) si trova

$$\frac{d^2 \bar{W}}{dq^2} = \frac{d^2 U}{dq^2} - \sum_{hk}^{n-m} \frac{\partial \gamma_{k1h}}{\partial q} e_h e_k - \sum_{hk}^{n-m} (\gamma_{k1h} + \gamma_{h1k}) e_k \frac{d e_h}{dq}$$

(19)

$$\left( \frac{d^2 \bar{W}}{dq^2} \right)_0 < 0$$

ovvero

(20)

$$\left( \frac{d^2 \bar{W}}{dq^2} \right)_0 > 0.$$

e per le (7)

$$\frac{d^2 \bar{W}}{dq^2} = \frac{d^2 U}{dq^2} - \sum_{hk}^{n-m} \frac{\partial \gamma_{k1h}}{\partial q} \bar{e}_h \bar{e}_k - \sum_{hk}^{n-m} \frac{1}{A_h} (\gamma_{k1h} + \gamma_{h1k}) \gamma_{w1h} \bar{e}_k \bar{e}_w,$$

da cui scambiando nella seconda sommatoria gli indici  $h$  e  $w$

$$\frac{d^2 \bar{W}}{dq^2} = \frac{d^2 U}{dq^2} - \sum_{hk}^{n-m} \bar{e}_h \bar{e}_k \left[ \frac{\partial \gamma_{k1h}}{\partial q} + \sum_w^{n-m} \frac{1}{A_w} (\gamma_{k1w} + \gamma_{w1k}) \gamma_{h1w} \right]$$

e ricorrendo alle (6)

$$\left( \frac{d^2 \bar{W}}{dq^2} \right)_o = \frac{d^2 U}{dq^2} - \sum_{hk}^{n-m} e_h^o e_k^o \left[ \left( \frac{\partial \gamma_{k1h}}{\partial q} \right)_o + \sum_w^{n-m} \frac{1}{A_w} (\gamma_{k1w}^o + \gamma_{w1k}^o) \gamma_{h1w}^o \right]$$

Con ciò le (19), (20) in forma esplicita si potranno infine scrivere

$$(21) \quad \sum_{hk}^{n-m} e_h^o e_k^o \left[ \left( \frac{\partial \gamma_{k1h}}{\partial q} \right)_o + \sum_w^{n-m} \frac{1}{A_w} (\gamma_{k1w}^o + \gamma_{w1k}^o) \gamma_{h1w}^o \right] \geq \left( \frac{d^2 U}{dq^2} \right)_o,$$

ove il segno superiore vale per le soluzioni stabili e l'inferiore per quelle instabili.

### § 3. — Applicazione al caso di un disco rotolante su superficie sferica e soggetto a forza centrale.

Sia  $D$  un disco circolare omogeneo di centro  $C$ , di massa e raggio unitari, vincolato a rotolare senza strisciamento sulla pagina esterna di una sfera di raggio  $R$ .

Indicheremo con

$T \equiv O, x, y, z$  una terna fissa con l'origine  $O$  nel centro della sfera;  $u, v$  la colatitudine e la longitudine del punto variabile sulla sfera in un sistema di coordinate polari di asse  $z$  e piano polare  $xz$ ;

$T' \equiv C, u', v', n'$  una terna avente gli assi  $Cu$  e  $Cv$  paralleli alle rette  $Mu$  ed  $Mv$ , tangenti alle linee coordinate  $u = \text{cost}$ ,  $v = \text{cost}$ , passanti per il punto  $M$  di contatto del disco con la sfera e l'asse  $Cn'$  parallelo alla normale in  $M$  alla sfera;

$T'' \equiv C, \xi, \eta, \zeta$  una terna solidale a  $D$  avente per asse  $C\xi$  l'asse giroscopico del disco;

$\varphi, \psi, \theta$  gli assi di nutazione, precessione e rotazione propria di  $T''$  rispetto a  $T'$ ;



$e_1, e_2, e_3$  le componenti del vettore velocità angolare del moto di  $D$  rispettivamente secondo la linea dei nodi e gli assi  $CM$  e  $C\zeta$ ;

$A$  il momento d'inerzia del disco rispetto ad un suo diametro.

Il disco sia soggetto ad una forza centrale attrattiva  $F$  applicata in  $C$  e di centro  $O$ . Tale forza, quando si ponga  $OC=\rho$  e si indichi con  $f(\rho)$  la sua componente secondo la retta orientata  $OC$ , discende dal potenziale

$$(22) \quad U = \int f(\rho) d\rho$$

che, mediante la formula di facile dimostrazione

$$(23) \quad \rho = \sqrt{1 + R^2 + 2R \operatorname{sen} \varphi},$$

può esprimersi in termini della sola  $\varphi$ .

Le equazioni differenziali del moto di  $D$  sono <sup>1)</sup>:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A+1) \frac{de_1}{dt} - \left[ (A+1) e_3 + \frac{A}{\operatorname{sen} \varphi + \frac{1}{R}} (e_2 \cos \varphi + e_3 \operatorname{sen} \varphi) \right] e_2 = \frac{dU}{d\varphi} \\ \frac{de_2}{dt} + \left( e_3 + \frac{e_2 \cos \varphi + e_3 \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi + \frac{1}{R}} \right) \dot{\varphi} = 0 \\ (2A+1) \frac{de_3}{dt} + e_2 \dot{\varphi} = 0 \\ \varphi = e \\ \psi = (e_3 - \theta) \cos \varphi - e_2 \operatorname{sen} \varphi + \frac{\theta}{R} \cos \varphi \cot \varphi \\ \left( \operatorname{sen} \varphi + \frac{1}{R} \right) \dot{\theta} = e_2 \cos \varphi + e_3 \operatorname{sen} \varphi \\ R\dot{u} = \theta \operatorname{sen} \psi \\ Rv \operatorname{sen} u = -\theta \cos \psi, \end{array} \right.$$

mentre l'espressione della forza viva è la seguente

$$(25) \quad T^* = \frac{1}{2} \left[ (A+1)e_1^2 + Ae_2^2 + (2A+1)e_3^2 \right]$$

<sup>1)</sup> VON P. WORONETZ, *Ueber die rollende Bewegung einer Kreisscheibe auf einer beliebigen Fläche unter der Wirkung von gegebenen Kräften*. *Matemat. Annalen*, 67 Band, pagg. 268-280.

9. — Si controlla facilmente, in base alle (24), (25) che, assumendo per caratteristiche cinetiche  $e_1, e_2, e_3$  tutte le ipotesi fatte nel n. 2 sono verificate; le prime quattro equazioni delle (24) costituiscono il sistema a cui ora si riduce il sistema (1) ed involgono le incognite  $\varphi, e_1, e_2, e_3$ . Una volta integrate tali equazioni le rimanenti potranno ridursi ad un secondo sistema nelle incognite residue  $\psi, \theta, u, v$ .

10. — Non è difficile riconoscere che il primo di questi due sistemi ammette come particolare soluzione statica

$$(26) \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad e_1 = \dot{\varphi} = 0, \quad e_2 = 0 \quad e_3 = e_3^0 \text{ (costante),}$$

dato che le (22), (23) per  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  porgono

$$\left( \frac{dU}{d\varphi} \right)_0 = 0.$$

E' agevole dimostrare, poi, con le rimanenti equazioni del sistema (24) che, nel moto corrispondente a tale soluzione, il punto di contatto  $M$  descrive una circonferenza massima della sfera in modo uniforme, mentre il disco resta costantemente nel piano di questa circonferenza.

11. — Le (7) nell'attuale caso si scrivono

$$\frac{de_2}{d\varphi} = - \left( e_3 + \frac{e_2 \cos \varphi + e_3 \sin \varphi}{\sin \varphi + \frac{1}{R}} \right)$$

$$\frac{de_3}{d\varphi} = - \frac{e_2}{2A + 1}$$

e di conseguenza, con le espressioni delle quantità  $\gamma_{h1h}$  deducibili dal secondo membro di queste equazioni, le (21 per la soluzione (26) conducono alle condizioni

$$e_3^{0^2} \gtrless \frac{\left( \frac{d^2 U}{d\varphi^2} \right)_0}{\left( A + 1 + \frac{A}{1 + \frac{1}{R}} \right) \left( 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{R}} \right)}$$

di stabilità o di instabilità a seconda che valga il segno superiore o quello inferiore.

Si badi che, poichè le (22), (23) nel nostro caso di forza attrattiva, forniscono

$$\left(\frac{d^2 U}{d\varphi^2}\right)_0 > 0$$

la stabilità è assicurata solo per un rotolamento sufficientemente rapido; in particolare la posizione d'equilibrio del disco nel piano di un cerchio massimo ( $e_3^0 = 0$ ) è instabile.

Osserviamo infine che facendo tendere  $R$  all'infinito, la sfera tende ad un piano  $\pi$  e la forza attrattiva diviene normale a  $\pi$  e rivolta verso  $\pi$ . Se questo piano si prende orizzontale e la forza, che conseguentemente deve avere la direzione della verticale discendente, viene identificata col peso del disco, avendosi in tal caso  $U = -g \sin \varphi$  ed essendo  $C = 2A$  il momento d'inerzia del disco rispetto al suo asse giroscopico, le (21) porgono come caso limite

$$e_3^0 \geq \frac{g}{2(c+1)}$$

Sono queste ultime le ben note <sup>1)</sup> condizioni per la stabilità ovvero per la instabilità dei moti rettilinei del punto di contatto di un disco pesante che, rotolando senza strisciamento su un piano orizzontale scabro, resta in un piano verticale.

---

<sup>1)</sup> Cfr. Introduz., Nota 1).

## KANT E LA GEOGRAFIA FISICA

*Nota del socio ordinario Giuseppe De Lorenzo*

(Adunanza del dì 6 giugno 1953)

**Sunto.** — In questa nota si espongono brevemente i grandi e geniali contri buti, portati da Emmanuele KANT allo studio ed all' insegnamento della Geografia fisica, della quale egli fu anche per ventiquattro anni, dal 1765 al 1789. docente nell' Università di Königsberg.

Emmanuele KANT è universalmente noto e famoso quale un grandissimo, forse il più grande, filosofo apparso sulla terra. Non altrettanto noto è il grande e geniale contributo, da lui portato allo studio ed all' insegnamento della Geografia fisica, della quale egli fu per ventiquattro anni, dal 1765 al 1789, assiduo docente nell' Università di Königsberg.

Con eloquente dizione lo SCHOPENHAUER ha indicato, come KANT sia stato la testa più originale, che la natura abbia mai prodotto. Pensare con lui ed a suo modo è qualche cosa, che non può essere paragonato con null' altro; perchè egli possedeva un tale grado di chiaro e specialissimo potere di riflessione, che non s' è mai trovato in alcun altro mortale. Si può giungerne al godimento, quando con assiduo e serio studio, per esempio, dei profondi capitoli della *Critica della ragion pura*, immedesimandosi in essi, si arriva quasi a pensare con la testa di KANT e ci si sente sollevati sopra noi stessi, allor che si comprende il profondo pensiero dell' unità sintetica dell' appercezione. Ci si sente allora come estraniati e distaccati, in modo miracoloso, da tutta l' esistenza di sogno, in cui siamo affondati, poichè se ne hanno quasi in mano gli elementi originari, e si vede come il tempo, lo spazio e la causalità, legati mediante l' unità sintetica della appercezione di tutti i fenomeni, rendono possibile questo complesso sensibile del tutto, di cui, condizionato dal nostro intelletto, consiste il mondo, che appunto perciò è puro fenomeno. Questo modo di considerare, tutto proprio di KANT, si può descrivere come il più distaccato sguardo, che sia mai stato gettato sul mondo, e come il più alto grado di obiettività. Il poterlo seguire concede un godimento spirituale che non ha pari: perchè è di grado più alto di quello, che concedono i poeti, che sono accessibili a tutti: mentre per giungere a godere il pensiero di KANT occorrono fatica e sforzo.

Tale pensiero porta alla concezione del mondo sotto la forma dell' idealismo trascendentale, che riguarda il *mundus intelligibilis* del *noume*



non, dell'inconoscibile *Ding an sich* di KANT (che SCHOPENHAUER identificò col *Wille* o volontà di vita), e del realismo empirico, rivolto al *mundus sensibilis* del *phaenomenon*, che è solo oggetto di ogni nostra possibile esperienza. Così KANT divenne il distruttore di tutta la precedente metafisica teologica e spiritualistica ed il fondatore della nuova filosofia critica; ed i suoi avversari, come il MENDELSSOHN, a ragione lo chiamarono il distruttore di tutto, l'onnischianti, *Alleszermalmer*. Similmente, come ho già fatto notare in altro mio scritto, due millenni e mezzo prima di KANT, i brâhmani della valle del Gange, avversari del Buddha SAKIAMUNI, lo chiamavano *bhûnaho*, il distruttore: *bhûnaho samano Gotamo*, un distruttore è l'asceta Gotamo. Ma GOTAMO distruggeva le precedenti metafisiche teistiche e panteistiche, per fondare la sua nuova dottrina morale, puramente umana: proprio così come ha fatto KANT nel nostro spazio e nel nostro tempo.

Questa funzione distruttrice e, al tempo stesso, costruttrice, di KANT è stata anche indicata dal nostro Benedetto CROCE, continuatore e revisore di HEGEL, nei suoi ultimi scritti, contenuti nel volume *Filosofia-Poesia-Storia*, edito dal Ricciardi a Napoli nel 1952. Così a pag. 547 egli scrive: « Quando il KANT concepì il pensare come giudicare e il giudizio come unità di categoria e di intuizione... precluse per sempre ogni astratto concetto e, precursore del Robespierre e insieme più di lui radicale, decapitò (come celiava lo HEINE e il nostro CARDUCCI mise in versi), non il re, ma Dio, il Dio trascendente. Ma lo HEGEL, non traendo la conseguenza ineluttabile di quella forma logica del giudizio, ricostituì la filosofia del concetto come filosofia della mente e dell'Idea, e reintrodusse un dualismo di spirito e natura con la mediazione della trascendente Idea, che esce da sè e torna in sè. Il KANT era, se ne rendesse conto o no, fuori di ogni religione, tutto nella critica; lo HEGEL rimase dentro la cerchia delle religioni, non tanto col dichiarare il cristianesimo religione assoluta e col civettare col protestantesimo, quanto con l'offrire nel suo sistema un quissimile di mitologia e trascendente religione ». E dice anche il CROCE, a pp. 44-45 dello stesso volume: « La seconda epoca viene aperta dal KANT, che al *cogito* cartesiano, al quale il VICO, riconoscendogli valore di coscienza, negava valore di scienza, sostituiva l'attivistica sintesi a priori, che fonde nel giudizio l'intuizione con la categoria e la cui efficacia innovatrice possedeva un'estensibilità, e perciò una universale validità, che il KANT non percorse con lo sguardo, sebbene mostrasse di averne sentore, consapevole come fu di aver compiuto con tale scoperta un atto rivoluzionario da porsi a lato della teoria astronomica del COPERNICO. La conversione del fatto col vero si determinava sotto un altro dei suoi aspetti e problemi nella sintesi a priori; ma il KANT pensava questa in riferimento alla scienza fisico-matematica, onde dichiarava l'impotenza del pensiero a risolvere le antinomie dei problemi filosofici e a dimostrare i supremi concetti, Dio, la libertà,

l'immortalità, che rimanevano come postulati della ragione pratica; e il riferimento alla scienza fisico-matematica gl'impediva il trapasso, il progresso e l'elevamento, che il VICO aveva compiuto, dalle *fictiones* delle scienze matematiche alle *realitates* della storia, e con ciò il riconoscimento nella sintesi a priori dell'organo vero e proprio della storicità, e l'ulteriore e assai da lui lontana conclusione dell'unità della filosofia con la storia e dello spiritualismo con lo storicismo assoluto. Con ciò Benedetto CROCE mette giustamente in chiara luce l'areligiosità e l'astoricità di KANT; ma, mentre pel primo caso lo estolle, in confronto di HEGEL, pel secondo lo abbassa, in confronto del VICO e dello storicismo assoluto, biasimandone, quasi, la sua concezione del mondo sensibile, fondata sulla scienza fisico-matematica; la quale è, invece, per noi, argomento di lode e di ammirazione, per le geniali intuizioni e gli svariati studi di KANT in tutti i campi della Geografia fisica e nel suo amoroso insegnamento.

Quando KANT nel 1740, nel suo sedicesimo anno, s'iscrisse nell'Università di Königsberg, aveva già compiuto sette anni di studi secondari nel *Collegium Fridericianum*; dal quale aveva riportato una solida istruzione di latino, di greco e di scienze, distinguendosi specialmente, per innata affinità elettiva, nello studio *de rerum natura* di LUCREZIO: sì che gli fu agevole ed attraente il seguire con ardore e con diligenza i corsi superiori di Teologia, Filosofia, Filologia e Scienze fisiche, matematiche e naturali, a lui particolarmente care. Ma le ristrettezze finanziarie, in cui versava la sua modesta famiglia, lo costrinsero, per mantenersi negli studi, a dare lezioni private; per le quali era assai ricercato e pregiato, specialmente per le sue conoscenze di lingue e letterature moderne, italiana, francese ed inglese. Ed allorchè morì il padre, nel 1746, essendosi le ristrettezze finanziarie rese ancor più gravi, lasciò l'insegnamento privato e cercò qualche posto di maestro in famiglie; tra le quali trovò infine la nobile famiglia del conte KAYSERLING, in cui rimase sino al 1755; affinando, in quell'elevato ambiente mondano, le sue originarie doti di disinvoltura, eleganza ed inappuntabilità, che lo distinsero per tutta la vita.

Frattanto egli aveva già dato prova della sua concezione fisica del mondo sensibile, pubblicando, il 22 aprile del 1747, nel ventitreesimo anniversario della sua nascita, i suoi pensieri sulla vera valutazione delle forze vive, *Gedanken von der wahren Schatzung der lebendigen Kräfte u. s. w.*, in cui dichiarava, che non si deve temere di opporsi alle vedute di uomini famosi, come CARTESIO, NEWTON, LEIBNITZ ed altri, ma bisogna seguire, per scoprire la verità, i dettami della propria mente, e si serviva, come motto, del pensiero tratto dal primo capitolo *de vita beata* di SENECA: *Nihil magis praestandum est, quam ne pecorum ritu sequamur antecedentium gregem, pergentes, non quo eundum est, sed qua itur*. Sempre fedele a tale nobile massima, nel 1754 egli rispose in modo originale al quesito messo come tema per concorso a premio per quell'anno dall'Accademia

delle Scienze di Berlino: se la terra, nella sua rotazione intorno all'asse, per cui si produce l'avvicendamento del giorno e della notte, abbia subito qualche mutamento dai primi tempi della sua origine, quale ne sia la causa, e come se ne possa accertarsi. In tale sua risposta egli annunciò la prossima pubblicazione di una sua cosmogonia, o tentativo di derivare dalle generali leggi di moto della materia, in conformità della teoria della gravitazione di NEWTON, l'origine della costruzione del mondo, la formazione dei corpi celesti e le cause del loro movimento. Tale cosmogonia divenne la sua geniale e famosa opera sulla storia naturale generale e teoria del cielo, *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels*, che apparve l'anno seguente, il 1755, e su cui dovrò ritornare. Ma, nello stesso anno 1754 egli scrisse anche la sua memoria su la questione, se la terra invecchia, fisicamente considerata, *Die Frage: ob die Erde veralte? physikalisch erwogen*: nella quale esaminò le varie ipotesi, geologiche e geografiche, sui mutamenti della terra, senza trarne alcuna deduzione o profezia; notando, con la sua solita, maliziosa arguzia, che gli uomini, i quali vogliono applicare la misura della loro efimera vita a quella della vita degli altri corpi dell'universo, sono simili alle rose di FONTENELLE; le quali giudicavano immutabile, eterno, immortale il loro giardiniere, perchè lo vedevano, *a memoria di rose*, sempre lo stesso!

Frattanto il discente maturava a docente: ed il 17 aprile 1755 KANT chiedeva alla Facoltà di Filosofia di Königsberg, ed otteneva, con la dissertazione *De igne*, l'abilitazione alla libera docenza; e cominciava così il suo famoso insegnamento, che doveva durare, per la Geografia fisica, fino al 1789, e poi, associandosi dal 1770 a quello della Filosofia teoretica, doveva prolungarsi fino al 1797, quando il *magister* KANT smise di far lezione, si mise in quiescenza ed attese, con i pochi amici e discepoli, ai suoi ultimi lavori, per spegnersi serenamente ottantenne, il 12 febbraio 1804.

Quale fosse l'efficacia dell'insegnamento universitario, geograficofisico e filosofico, di KANT, ce l'hanno lasciato scritto due luminari del pensiero e della letteratura tedesca del Settecento: Johann Georg HAMANN, il mago del nord, che fu maestro di HERDER e fu paragonato da GOETHE al nostro VICO; e Johann Gottfried HERDER, che fu a sua volta amico e maestro di GOETHE, nei *Lehrjahre* del grande poeta. HERDER aveva seguito dal 1762 al 1764 le lezioni di KANT, di Logica, Metafisica, Morale, Matematica e Geografia fisica, rimanendone affascinato; e, benchè poi restasse terribilmente corrucciato per la tagliente critica, con cui il suo antico e venerato *magister* aveva recensito la sue idee per la filosofia della storia dell'umanità, *Ideen zur Philosophie der Geschichte der Menschheit*, del 1784, demolendone lo storicismo ed il teologismo, non potè fare a meno, di ricordarne le mirabili lezioni, nelle sue lettere pel progresso dell'umanità, del 1795: « Io ho avuto la fortuna, di conoscere un filosofo, che fu mio maestro. Egli nei suoi più floridi anni aveva la lieta vivacità di un giovinetto, che



ancora credo lo accompagni nella sua più grigia vecchiaia. La sua fronte ampia, costrutta per pensare, era una sede d'indistruttibile serenità e letizia; la parola più ricca di pensieri fluiva dalle sue labbra; lo scherzo, il motto di spirito e l'arguzia erano al suo comando; e la sua lezione era una diletta conversazione. Con lo stesso spirito, col quale saggiava LEIBNITZ, WOLF, BAUMGARTEN, CRUSIUS, HUME, e seguiva le leggi naturali di NEWTON, di KEPLER e degli altri fisici, accoglieva gli scritti di ROUSSEAU ed ogni nuova scoperta di scienza naturale, la valutava e ritornava sempre sulla impregiudicata conoscenza della natura e sul valore morale dell'uomo. Scienza e storia naturale, antropologia, matematica ed esperienza erano le fonti, con le quali egli avvivava la sua lezione e la sua conversazione; nulla gli era indifferente di quel che gli pareva, che fosse degno di esser saputo. Nessuna cabala, nessuna setta, nessun vantaggio, nessun profitto od onore avevano per lui il menomo stimolo in confronto dell'ampliamento e del rischiaramento della verità. Egli incitava e costringeva con grazia a pensare da sè. Il despotismo era alieno dal suo animo. Il sale con cui egli limando ha purificato ed affilato la nostra intelligenza e la nostra ragione, la forza con cui ha evocato in noi la legge morale della libertà, non possono produrre che buoni frutti. Quest'uomo, che io nomino con la più grande gratitudine e venerazione, è Immanuel KANT: la sua immagine sta cara innanzi a me. » Così, con questo candido atto di fede, il discepolo riconoscente cancellò il suo risentimento verso il Maestro, inflessibile difensore della Verità.

A questa eloquente testimonianza del discepolo personale di KANT bisogna aggiungere quella, non meno importante, di un discepolo spirituale e lontano, ma non meno fervido ammiratore del Maestro: voglio dire il barone von ZEDLITZ, ossia l'illuminato ministro dell'istruzione del suo grande e non meno illuminato sovrano FEDERICO II. Lo ZEDLITZ aveva avuto da uno scolaro di KANT gli appunti delle sue lezioni di Geografia fisica, ma non trovandoli abbastanza corretti, ne chiedeva di migliori al Maestro, con una lettera da Berlino del 21 febbraio 1778: « Io seguo ora presso di Lei, mio caro professor KANT, un corso di Geografia fisica, ed il meno, che posso fare, è di esprimergliene la mia gratitudine. Per quanto strano ciò possa apparirle, ad una distanza di buone ottanta miglia, io pur debbo confessare, che sono nel caso di uno studente, che è troppo lontano dalla cattedra e non sente bene quel che dice il professore..... E questo mio scritto serva almeno a darle l'assicurazione, che stimo ed ammiro inesprimibilmente le sue conoscenze e che sono, con una venerazione corrispondente a tali meriti, il Suo devotissimo servo ZEDLITZ ». E lo stesso ministro, con un'altra sua lettera del 28 maggio 1778, scriveva a KANT, ed insisteva poi di nuovo calorosamente presso di lui, pregandolo di accettare il trasferimento nella grande università di Halle, con maggiore stipendio ed emolumenti e col titolo di Hofrath, concessogli dal rè. Ma il Maestro rifiutò trasferimento,



onorari ed onori, e non volle muoversi dal suo paese, seguendo inconsapevolmente l'antico pensiero di LAO-TSE: « Senza uscire dalla porta, si può conoscere il mondo; senza guardare dalla finestra si possono sapere le vie del cielo. » Ma KANT fu grato a ZEDLITZ della sua benevolenza e gli fece un dono assai più grande di quello, che il ministro aveva offerto a lui, dedicandogli, il 29 marzo 1781, la sua massima opera filosofica, la *Critica della ragion pura*. Ma, assai prima, il 14 marzo 1755, egli aveva dedicato al suo re, FEDERICO il Grande, la sua massima opera di Geografia fisica, ossia la sua storia naturale generale e teoria del cielo, *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels*. Tale opera è veramente il più alto volo di fantasia, che la mente umana, sorretta dalle ali della scienza, abbia lanciato nell'infinità dello spazio e del tempo. Ad essa si possono a buon diritto applicare i versi, che Giordano BRUNO premise ai suoi dialoghi *De l'infinito universo e mondi*, e quelli, con i quali egli iniziò il suo poema *De immenso et innumerabilibus seu de universo et mundis*, del 1590, nei quali respira l'anima antica di LUCREZIO:

Adque alios mundo ex isto dum adsurgo nitentes,  
Aethereum campumque ex omni parte pererro,  
Attonitis mirum et distans post terga relinquo.

Ma il KANT stesso l'annunziò con parole molto semplici e piane. « Mi sono vietato » egli scrisse nella prefazione alla *Storia naturale generale e teoria del cielo* o *Saggio sulla costituzione e l'origine meccanica dell'universo*, apparso anonimo pure nel 1755 « ogni invenzione arbitraria. Dopo avere scomposto il mondo nel più semplice chaos, non ho fatto intervenire, per ricavarne il mirabile ordinamento della natura, che due forze, l'attrazione e la repulsione, forze egualmente certe, egualmente semplici e, nello stesso tempo, egualmente primitive e generali. Tutte e due sono prese dalla filosofia naturale di NEWTON. La prima è una legge della natura, oggi dimostrata senza contestazioni. La seconda, a cui forse la teoria newtoniana non apporta lo stesso grado di evidenza, la faccio intervenire in condizioni, nelle quali nessuno può negarne l'esistenza, nello stato di diffusione estrema della materia, per esempio nei vapori. Tali sono le basi assai semplici, su cui ho costruito tutto il mio sistema, nel modo meno artificiale, senza ingegnarmi di dedurre dai principii altre conseguenze se non quelle, che dovranno presentarsi spontaneamente all'attenzione del lettore ». Malgrado la modestia di questa premessa, il valore dell'opera è tale, che basterebbe essa da sola a dare a KANT la gloria dell'immortalità.

Dopo la sua pubblicazione, nel 1755, l'astronomo LAMBERT aveva stampato, nel 1761, le sue *Kosmologische Briefe*, apparse poi anche in francese come *Lettres cosmologiques sur la constitution de l'univers*; nelle quali faceva sue le idee di KANT, senza citarne l'autore. E da esse probabilmente

il LAPLACE trasse l'ispirazione per i libri V e VI e la nota 7 della sua magistrale *Exposition du système du monde*, del 1796, nella quale, con la chiarezza e la semplicità, degne del suo grande ingegno matematico, espose la stessa teoria; che, per quanto riguarda il sistema planetario solare, va ora sotto il nome di teoria di KANT e LAPLACE; la quale ebbe la più larga diffusione in tutte le scuole del secolo scorso, e resta ancor oggi, con le modifiche dovute allo stato attuale della scienza, quella che, in confronto delle numerose altre ipotesi formulate in tempi recenti, ancor meglio appaga il nostro spirito.

Essa influì potentemente anche su spiriti non specialmente scientifici. LEOPARDI, per esempio, che ignorava l'opera di KANT, ma conosceva quella di LAPLACE, come ne fa fede la menzione del nome, che egli ne fa in una nota del suo *Zibaldone*, del 17 aprile 1828, se ne servì, per esprimere, con i suoi marmorei versi, i giri senza principio nè fine, in cui si svolge l'eterno divenire di tutti i corpi dell'infinito universo, ed i loro rapporti con la minimezza e la caducità dell'uomo: sia nel *Canto notturno di un pastore errante dell'Asia*, del 1830, che ne *La Ginestra*, del 1836:

E quando miro in cielo arder le stelle;  
Dico fra me pensando:  
A che tante facelle?  
Che fa l'aria infinita, e quel profondo  
Infinito seren? che vuol dir questa  
Solitudine immensa, ed io che sono?  
Così meco ragiono, e della stanza  
Smisurata e superba,  
E dell'innumerabile famiglia,  
Poi di tanto adoprar, di tanti moti  
D'ogni celeste, ogni terrena cosa,  
Girando senza posa,  
Per tornar sempre là donde son mosse;  
Uso alcuno, alcun frutto  
Indovinar non so.  
.....  
Sovente in queste rive,  
Che, desolate, a bruno  
Veste il flutto indurato, e par che ondeggi  
Seggo la notte e su la mesta landa  
In purissimo azzurro  
Veggio dall'alto fiammeggiar le stelle,  
Cui di lontan fa specchio  
Il mare, e tutto di scintille in giro  
Per lo vôto seren brillare il mondo.  
E poi gli occhi a quelle luci appunto,  
Ch'a lor sembrano punto,

E sono immense, in guisa  
Che un punto a petto a lor son terra e mare  
Veracemente; a cui  
L'uomo non pur, ma questo  
Globo, ove l'uomo è nulla,  
Sconosciuto è del tutto; e quando miro  
Quegli ancor più senz' alcun fin remoti  
Nodi quasi di stelle,  
Ch'a noi paion qual nebbia, a cui non l'uomo  
E non la terra sol, ma tutte in uno,  
Del numero infinite e della mole,  
Con l'aureo sole insiem, le nostre stelle  
O sono ignote, o così paion come  
Essi alla terra, un punto  
Di luce nebulosa; al pensier mio  
Che sembri allora, o prole  
Dell'uomo?

Ma, il solo fatto, che LEOPARDI potesse pensare tali pensieri, indica il reale rapporto tra la mente dell'uomo ed il mondo sensibile, che ne è la sua rappresentazione, sotto le forme dello spazio e del tempo infiniti.

Nella stessa scia della concezione cosmogonica di KANT e nello stesso ordine di pensieri di LEOPARDI, e quasi contemporaneamente, nel 1844, SCHOPENHAUER, scriveva al principio del secondo volume del *Mondo quale volontà e rappresentazione*: « Nello spazio infinito innumerevoli globi lucenti, intorno a ciascuno dei quali gira circa una dozzina di minori, illuminati, internamente caldi, esternamente freddi, rivestiti di una crosta irrigidita, su cui un rivestimento di muffa ha prodotto esseri viventi e conoscenti: quest'è la realtà empirica, il reale, il mondo. Ma, per un essere pensante è una penosa situazione, lo stare sopra uno di quegli innumerevoli globi, pendulo nello spazio infinito, senza sapere nè donde nè dove, ed essere solo uno di innumerevoli simili esseri, che si stringono, si spingono, si vessano, sorgendo e trapassando rapidamente e senza posa, nel tempo senza principio nè fine... »

Così esprime KANT, quale filosofo, il rapporto tra l'uomo e l'universo, e così, due millenni e mezzo prima di lui, l'espresse il Buddha SAKYAMUNI. Il grande indologo Karl Eugen NEUMANN, nel suo commento al XXIV *sutta* del *Dighanikâyo*, felicemente mette a confronto quel che KANT scrisse nei § 25-29 del suo *Critica del giudizio estetico* con quanto SAKYAMUNI ci ha lasciato detto in molti suoi discorsi, specialmente del *Samyttakanikâyo*. Il sublime, scrive KANT, non sta nella grandezza di un tutto immensurabile e nell'innumerabile quantità delle galassie e delle nebulose, delle quali non si può aspettarsi alcun limite; ma piuttosto sta nel fatto, che noi, col nostro pensiero, giungiamo a sempre maggiori unità, per cui ogni grandezza della natura ci appare sempre di nuovo come piccola, per l'illimi-

tatezza della nostra forza d'immaginazione: sì che la natura, in confronto delle idee della ragione, quando deve dare una rappresentazione, ad esse commisurata, finisce col divenire evanescente. Così si giunge ad una misura, che ha quello stesso infinito per unità; e così troviamo in noi una superiorità sulla natura nella sua stessa immensurabilità. Perciò la sublimità è contenuta, non nella natura, ma nella nostra mente: in quanto noi possiamo avere la conoscenza, di essere superiori alla natura in noi ed anche alla natura fuori di noi, per quanto essa influisce in noi. Similmente il Buddha SAKYAMUNI diceva, che non si può mai raggiungere, fuori di noi, la fine del mondo nello spazio, nè scorgerne il principio nè la fine nel tempo: ma che in questo nostro corpo, alto otto spanne, dotato di percezione e di coscienza, è contenuto il mondo, l'origine del mondo, la fine del mondo, e la via che porta alla fine del mondo.

Dopo il suo folle volo nell'infinito, con la sua *Teoria del cielo*, KANT continuò ininterrottamente, fin quasi alle soglie della morte, ad esplicare la sua attività in tutti i campi della Geografia fisica, sia nelle lezioni che nelle opere. Di queste, non potendo soffermarmi a lungo su esse, mi limiterò ad indicare gli argomenti. Nel 1756 descrisse il terribile terremoto di Lisbona e gli altri, che si verificarono in quel periodo di tempo, ed inoltre scrisse alcune spiegazioni per la teoria dei venti; nonchè una *Monadologia physica*, in latino. Nel 1758 una nuova concezione del moto e della quiete e delle loro conseguenze nei primi principii della scienza naturale. Nel 1768 una nota sul principio della differenza delle regioni nello spazio. Nel 1775 un'altra sulle diverse razze umane; cui nel 1785 seguì quella sul concetto della razza umana. Anche nel 1785 uno specialissimo lavoro sui vulcani nella luna. Nel 1786 pubblicò l'importantissimo lavoro sui principii metafisici della scienza naturale, *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*; al quale nel 1788 tenne dietro l'altro sull'uso dei principii teleologici nella filosofia. E così si giunge al 1802, a due anni appena prima della sua morte, quando, per suo desiderio e sotto la sua direzione, il suo discepolo Friedrich Theodor RINK raccolse tutti gli appunti delle sue più che ventennali lezioni di Geografia fisica, pubblicandoli col titolo *Vorlesungen über Physische Geographie, auf Verlangen KANT's aus seiner Handschrift herausgegeben von Fr. Th. RINK*; in cui sono ordinate e contenute tutte le sue svariatissime e genialissime concezioni di Geografia fisica.

Questa profonda conoscenza delle scienze fisiche, matematiche e naturali costituisce, come giustamente, se anche criticamente, ha osservato Benedetto CROCE, la base fondamentale del lato immanente o del realismo empirico di KANT; il quale, però, non perdeva mai di vista il lato transcendente del suo idealismo transcendente; esposto, per ciò che riguarda il mondo intelligibile, nella sua *Critica della ragion pura* e, per ciò che riguarda il mondo morale della cosa in sè, o dell'animo nostro, del *Velle* di



DANTE, del *Wille* di SCHOPENHAUER, nella sua *Critica della ragion pratica*. Ne dò, per chiudere questo mio scritto, due esempi.

Il primo di essi è tratto dalla nota alla quinta considerazione del suo fondamentale lavoro sull'unica prova possibile per una dimostrazione dell'esistenza di Dio, *Der einzig mögliche Beweisgrund zu einer Demonstration des Daseyns Gottes*, del 1763. Il lavoro finisce con la chiusa, eminentemente kantiana: « È assolutamente necessario, che dell'esistenza di Dio ci si convinca; ma non è altrettanto necessario, che la si dimostri ». La nota dice così: « Se io rifletto sulle osservazioni microscopiche del dott. HILL, e vedo in una sola goccia d'acqua tante specie d'animali, alcune predatrici, armate con apparecchi di distruzione, le quali, mentre sono intente ad inseguirne altre, sono a lor volta distrutte da più forti tiranni del loro mondo acquatico; quando vedo le astuzie, le violenze ed il tumulto in una goccia di materia, e sollevo di là i miei occhi al cielo, per vedere lo spazio immensurabile brulicare di mondi, come di granelli di polvere: allora nessuna lingua umana può esprimere il sentimento, mosso da tale pensiero, ed ogni analisi metafisica cede alla sublimità ed alla dignità, destata da una tale visione ». Questa considerazione sull'infinitamente piccolo si armonizza con l'altra sull'infinitamente grande, più estesamente esposta nel secondo esempio.

Questo secondo esempio ci è dato dalla nota e famosa pagina alla fine della *Critica della ragion pratica*, del 1788. Essa dice: « Due cose riempiono l'animo con sempre crescente ammirazione e venerazione, quanto più spesso e più lungamente la meditazione se ne occupa: il cielo stellato sopra di me, e la legge morale in me. Entrambe io non debbo cercarle nè supporle come velate in oscurità od irraggiungibilità, fuori del mio cerchio visivo; io le vedo innanzi a me e le congiungo immediatamente con la coscienza della mia esistenza. La prima comincia dal posto, che io assumo nel mondo sensibile esterno, ed allarga la connessione, in cui sto, in sterminata grandezza di mondi su mondi e di sistemi di sistemi, per giunta in tempi illimitati dei loro periodici movimenti, senza principio nè fine. La seconda comincia dal mio invisibile Sè, dalla mia personalità, e mi rappresenta in un mondo che ha vera infinità, ma è percepibile solo dalla mente, e con cui (quindi anche però con tutti quegli altri mondi visibili) io mi riconosco in connessione, non solo causale, come là, ma generale e necessaria. La prima visione, di una innumerabile massa di mondi, annienta la mia importanza come di una creatura animale, che deve ridare la materia, da cui divenne, al pianeta (un semplice punto dell'universo), dopo che è stata fornita (non si sa come) per breve tempo di forza vitale. La seconda, invece, rialza il mio valore, come di una intelligenza, infinita, mediante la mia personalità, nella quale la legge morale mi rivela una vita indipendente dall'animalità e perfino dall'intero mondo sensibile: almeno

per quanto si può inferire dalla determinazione finale della mia esistenza mediante questa legge, che non è limitata alle condizioni ed ai limiti di questa vita, ma passa nell'infinito. » Da questa pagina si vede a quali altezze giunga il genio di KANT, sollevandosi sulla solida base delle sue conoscenze fisicomatematiche e dei suoi profondi studi di astronomia e di Geografia fisica.

# LE SOLLECITAZIONI DI ORIGINE TERMICA DI UN PONTE MAILLART

*Nota del dott. ing. Tullio Renzulli, presentata dal socio A. Galli*

(Adunanza del dì 7 marzo 1953)

**Sunto.** - Si ricercano le sollecitazioni di origine termica in una struttura del tipo MAILLART attraverso la conoscenza delle linee di influenza di coazioni. Si riporta un esempio concreto.

## 1) Premessa.

Nello spirito delle ipotesi <sup>1)</sup> poste generalmente a base del calcolo dei sistemi collaboranti ad arco sottile ed implacato irrigidente, che da Robert



Fig. 1.

<sup>1)</sup> Le ipotesi sono:

a) Collegamento arco-trave realizzato da montanti così vicini da poter assimilare gli sforzi da essi trasmessi ad una sollecitazione distribuita.

b) Profilo dell'arco coincidente con la funicolare dei carichi permanenti, quindi parabolico per peso proprio uniforme.

c) Uguaglianza degli spostamenti verticali della trave e dell'arco, il che implica che siano trascurabili l'accorciamento e lo spostamento orizzontale delle stilate.

d) Rigidità flessionale della trave costante.

e) Rigidità flessionale  $K_a$  dell'arco variabile con la legge  $K_a \cos \alpha = \text{cost.}$

MAILLART traggono il nome, le incognite che appaiono nella risoluzione del problema sono due: la spinta  $H$  orizzontale e la funzione  $p(x)$  che definisce gli sforzi trasmessi, per effetto del carico accidentale, fra la trave e l'arco.

Seguendo la teoria, cosiddetta del primo ordine, si determina la linea d'influenza  $h$  della spinta  $H$ , come diagramma delle componenti verticali degli spostamenti dell'asse della trave indotti dalla distorsione  $\Delta = -1$  (fig. 1).

Poichè si suppone di rimanere nel campo dei piccoli spostamenti, l'asse dell'arco rimane parabolico; poichè, inoltre, l'arco è sottile il suo asse coincide con la funicolare dei carichi  $p(x)$  indotti dalla  $\Delta$ , che di conseguenza sono da considerare uniformi. Resta come incognita la sola  $H$ . Il diagramma dei momenti sulla trave è fornito dalle ordinate dell'asse moltiplicate per la forza distorcente, e il diagramma  $h$  coincide con la deformata di una trave soggetta ad un carico uniforme.

Ricordiamo che la ricerca delle sollecitazioni di origine termica in un arco a due cerniere si svolge come segue (vedi fig. 2): sostituita la cerniera

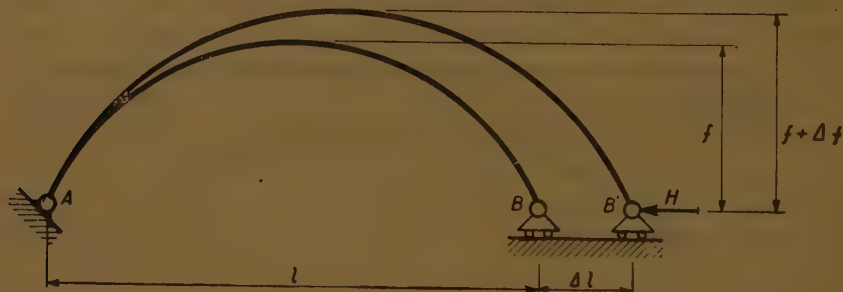


Fig. 2.

in B con un carrello, si fa agire la variazione termica  $t$ ; per essa il sistema, che è isostatico, si deforma mantenendosi simile a sè stesso: la luce aumenta di  $\alpha l \Delta t$ , la freccia aumenta di  $\alpha f \Delta t$ .

La forza  $H$  capace di produrre sull'arco della fig. 2 lo spostamento  $\alpha l \Delta t$  del carrello B, ripristinando così le condizioni di vincolo, è la spinta  $H_t$  di origine termica.

Per una travata MAILLART, invece, non è lecito svincolare solo la cerniera in B, poichè la struttura rimane così iperstatica, la trave si oppone con il sistema delle forze  $p(x)$  distribuite alla libera dilatazione dell'arco secondo la verticale, ed in complesso la variazione  $\Delta l$  della corda risulta maggiore di  $\alpha l \Delta t$ , avendo le forze  $p(x)$  effetto concorde a quello termico riguardo alla variazione di lunghezza della corda.

2) Il calcolo esatto della spinta  $H_t$  attraverso le condizioni di congruenza.

Sostituita la cerniera in B (vedi fig. 1) con un carrello, ed eliminate

le cerniere di collegamento dei montanti con la trave, si sottopone il sistema alla variazione  $\Delta t$  di temperatura. La generica sezione S, definita mediante le coordinate  $x$  ed  $y$  del suo baricentro nel riferimento cartesiano della fig. 1 si abbassa di  $\Delta y$

$$(1) \quad \Delta y = \alpha y \Delta t$$

Il setto di collegamento si accorcia di

$$(2) \quad \Delta y_1 = \alpha (y_0 - y) \Delta t$$

dove  $y_0$  è la quota dell'asse della trave irrigidente rispetto alla congiungente le imposte dell'arco.

Non si ha più il rispetto della congruenza, poichè tra l'estremo del montante e la trave si è verificato lo spostamento relativo  $\Delta s$

$$(3) \quad \Delta s = \Delta y + \Delta y_1 = \alpha y \Delta t + \alpha (y_0 - y) \Delta t = \alpha y_0 \Delta t$$

questa relazione poteva ottenersi direttamente poichè ogni struttura isostatica rimane simile a sè stessa per variazioni di temperatura. Inoltre <sup>1)</sup> B si è spostato orizzontalmente di  $\alpha l \Delta t$ .

Occorre applicare lungo la linea precedentemente svincolata ai montanti ed alla trave due sistemi di forze  $p(x)$  e  $-p(x)$  uguali ed opposti e la spinta  $H_t$  in B, tali da ristabilire la congruenza.

La variazione elastica di lunghezza del montante generico, definito mediante la sua ascissa  $x$ , vale

$$(4) \quad \Delta s_1 = \frac{p(x) (y_0 - y)}{b E}$$

dove  $b$  è lo spessore dei montanti. Mentre per i montanti la variazione elastica di lunghezza è funzione solamente del corrispondente valore della  $p(x)$ , per l'arco e per la trave l'abbassamento di ciascun punto è funzione dei valori che la  $p(x)$  assume in tutto l'intervallo  $0 < x < l$ . Indicando con  $G_a(x, x')$  e  $G_t(x, x')$  le funzioni di GREEN dell'abbassamento dell'arco e della trave in corrispondenza dell'ascissa  $x$  provocato da una forza unitaria agente in corrispondenza della ascissa  $x'$ , si ha,

$$(5) \quad v_a(x) = p(x') \cdot G_a(x, x')$$

(vedi fig. 3)

$$v_t(x) = p(x') G_t(x, x')$$

<sup>1)</sup> Non è forse inutile avvertire che i setti si sono assimilati ad una cortina uniforme di spessore  $b$ ; quest'ultimo si ricava dalla uguaglianza tra le sezioni effettive e fittizie.



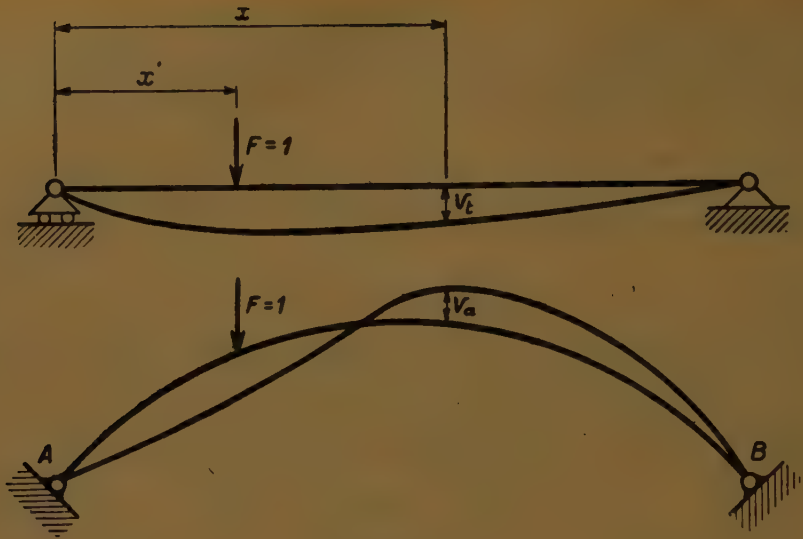


Fig. 3.

Gli abbassamenti dovuti al sistema di forze  $p(x)$  sono quindi

$$(6) \quad v_a(x) = \int_0^l p(x') \cdot G_a(x, x') dx'$$

$$v_t(x) = \int_0^l p(x') \cdot G_t(x, x') dx'$$



Fig. 4.

Indicando con  $\delta(x)$  l'abbassamento della sezione  $S(x, y)$  per  $H = -1$  nell'arco isostatico (vedi fig. 4) e tenuto conto delle (3), (4), (6), si può scrivere la seguente equazione di congruenza

$$(7) \quad \alpha y_0 \Delta t = \frac{p(x)(y_0 - y)}{E b} + \int_0^l p(x') \cdot G(x, x') dx' - H_t \delta(x)$$

dove  $G(x, x') = G_a(x, x') + G_t(x, x')$  ed  $H_t$  è la spinta generata dalla  $\Delta t$ .

Nella (7) sono incognite la funzione  $p(x)$  e la spinta  $H_t$ : è pertanto necessaria un'altra equazione, fornita dalla condizione di vincolo in B; notando che, per reciprocità,  $\delta(x)$  è uguale all'allungamento della corda per una forza verticale unitaria applicata verso il basso in corrispondenza di  $S(x)$ , risulta

$$(8) \quad \alpha l \Delta t = - \int_0^l p(x') \delta(x') dx' + H_t \Delta l$$

dove  $\Delta l$  è l'allungamento della corda causato da  $H = -1$ .

Ricavando  $H_t$  dalla (8)

$$H_t = \frac{1}{\Delta l} \left[ \int_0^l p(x') \delta(x') dx' - \alpha l \Delta t \right]$$

e sostituendo nella (7) si ha

$$\begin{aligned} \alpha y_0 \Delta t = & \frac{p(x)(y_0 - y)}{E b} + \int_0^l p(x') \cdot G(x, x') \cdot dx' + \frac{\alpha}{\Delta l} \Delta t \delta(x) + \\ & - \frac{1}{\Delta l} \int_0^l p(x) \delta(x') \delta(x) dx \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} & \int_0^l p(x') \left[ G(x, x') - \frac{1}{\Delta l} \delta(x) \delta(x') \right] dx' + \frac{p(x)(y_0 - y)}{E b} = \\ (9) \quad & = \alpha \Delta t \left[ \frac{1}{\Delta l} \delta(x) + y_0 \right] \dots \end{aligned}$$

La (9) è riducibile al tipo

$$\int_0^l p(x') \Omega(x, x') dx' + F(x) = h(x)$$

dove  $\Omega(x, x')$  è simmetrica nelle due variabili  $x$  ed  $x'$  ed  $h(x)$  è una funzione nota: si è così pervenuti ad una equazione integrale non omogenea di FREDHOLM di seconda specie [2], alla cui risoluzione approssimata sono connesse ben note difficoltà.

3) Il calcolo della spinta nel caso di arco sottile.

Nel caso di arco sottile il procedimento di calcolo della  $H_t$  esposto nel paragrafo precedente si semplifica notevolmente, dato che la  $p(x)$ , come si è rilevato nella premessa, è uniformemente distribuita.

L'arco caricato dalla  $p(x)$  e dalla  $H_t$  è soggetto al solo sforzo normale  $N$ ; la componente orizzontale dell'accorciamento di un elementino  $ds$  vale

$$(10) \quad \frac{N}{EA} ds \cos \alpha = \frac{H}{EA} ds$$

dove  $\alpha$  è l'angolo che la tangente all'asse forma con la orizzontale. La condizione di vincolo, trascurando l'allungamento dei montanti, si scrive

$$(11) \quad \int_0^l \frac{H/\cos \alpha}{EA} dx - p(x) \int_0^l \delta(x) dx = \alpha L_m \Delta t.$$

La  $H_t$  e la  $p(x)$  soddisfano la relazione

$$(12) \quad \frac{p(x)l^2}{8} = H_t f$$

la quale esprime la condizione che il momento in chiave (come in ogni altro punto dell'arco) è nullo.

La (11), tenendo presente la (12), si scrive:

$$(13) \quad \int_0^l \frac{H_t/\cos \alpha}{EA} dx - \frac{8 H_t f}{l^2} \int_0^l \delta(x) dx = \alpha L_m \Delta t$$

<sup>1)</sup> La (11) è la espressione alla quale si riduce la (8) nella ipotesi di arco sottile. Infatti, in questo caso, la  $p(x)$  è uniforme e l'accorciamento nell'arco provocato dallo sforzo normale si scrive  $\frac{H/\cos \alpha}{EA} dx$ . Trascurando la variazione di lunghezza dei montanti (cioè considerando costanti le ordinate dell'asse dell'arco) l'accorciamento termico di un elementino  $ds$ , comprese fra le ascisse  $x$  e  $x + dx$ , provoca un avvicinamento delle imposte pari a  $\alpha \Delta t ds / \cos \alpha = \alpha \Delta t \frac{ds}{dx} ds = \alpha \Delta t \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 dx$ ; per tutto l'arco lo spostamento relativo delle

imposte vale  $\int_0^l \alpha \Delta t \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 dx = \alpha \Delta t L_m$ .

Risulta, sviluppando gli integrali [4]

$$(14) \quad \frac{H_t L_m}{E A_m} + \frac{8}{15} \frac{H_t f^2 l}{K} = \alpha L_m \Delta t$$

dove  $f$  = freccia

$l$  = luce

$$L_m = \int_0^l \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 dx$$

$A_m$  = media dei valori dell' area della sezione retta dell' arco alla imposta ed in chiave.

$K$  = rigidità flessionale complessiva, somma di quella dell' arco e di quella della trave.

La spinta  $H_t$  calcolata mediante la (14) è quella atta a provocare una variazione  $\alpha L_m \Delta t$  della corda dello arco MAILLART.

Pertanto, nella ipotesi di arco sottile, la ricerca delle sollecitazioni termiche in una struttura MAILLART, analogamente a quanto avviene per il calcolo statico, si riduce alla ricerca delle sollecitazioni in un arco a due cerniere.

#### 4) Il calcolo della spinta $H_t$ secondo la teoria delle linee di influenza di coazioni.

La (14) risolve il problema nel caso di arco sottile: per poter giungere nel caso generale ad una formula altrettanto semplice, evitando così la risoluzione della equazione integrale (9), si utilizza la teoria delle linee di influenza di coazioni [3], della quale si riportano i lineamenti.

E' nell' uso corrente definire come coazioni distribuite lungo un tratto di trave ad asse piano tre funzioni dell' ascissa  $s$ ,  $\mu(s)$ ,  $\lambda(s)$ ,  $\tau(s)$ , tali che la rotazione  $d\varphi$ , l' allontanamento assiale  $du$  e lo scorrimento  $dv$  relativi tra due sezioni rette distanti  $ds$  siano espressi da:

$$\begin{aligned} 1) \quad d\varphi &= \mu(s) ds \\ du &= \lambda(s) ds \\ dv &= \tau(s) ds \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Nel caso di coazioni dovute a variazioni di temperatura si ha:  $d\varphi = \alpha \Delta t_1 / h$   
 $du = \alpha \Delta t$  dove  $\Delta t_1$  è una variazione termica lineare lungo la altezza della trave, che si annulla in corrispondenza del baricentro, e i cui valori estremi differiscono di  $\Delta t_1$ ;  $\Delta t$  è una variazione termica costante lungo la altezza della trave.

Per il segno vale la solita convezione di assumere positive le coazioni per cui le caratteristiche della sollecitazione, definite positive, compiano lavoro positivo.



Sia una struttura soggetta ad un sistema A di forza  $F_A$  e coazioni  $\mu_A, \lambda_A, \tau_A$ ; e ad un sistema B di forze  $F_B$  e coazioni  $\mu_B, \lambda_B, \tau_B$ .

Il principio dei lavori virtuali applicato alle forze (agli spostamenti) del sistema A ed agli spostamenti (alle forze) del sistema B fornisce le due relazioni:

$$\begin{aligned} \sum F_A \eta_B + \int_S M_A \mu_B ds + \int_S N_A \lambda_B ds + \int_S T_A \tau_B ds + \\ - \int_S \frac{M_A M_B}{EI} ds - \int_S \frac{N_A N_B}{EA} ds - \int_S \chi \frac{T_A T_B}{GA} ds = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sum F_B \eta_A + \int_S M_B \mu_A ds + \int_S N_B \lambda_A ds + \int_S T_B \tau_A ds + \\ - \int_S \frac{M_B M_A}{EI} ds - \int_S \frac{N_B N_A}{EA} ds - \int_S \chi \frac{T_B T_A}{GA} ds = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Dalle (15) e (16) si ha:

$$\begin{aligned} \sum F_A \eta_B + \int_S M_A \mu_B ds + \int_S N_A \lambda_B ds + \int_S T_A \tau_B ds = \\ = \sum F_B \eta_A + \int_S M_B \mu_A ds + \int_S N_B \lambda_A ds + \int_S T_B \tau_A ds \end{aligned} \quad (17)$$

La (17), che esprime analiticamente una generalizzazione del teorema di BETTI, si può enunciare così: « i lavori mutui di due sistemi misti di forze e coazioni, somma del lavoro svolto dalle forze e di quello compiuto dalle caratteristiche interne della sollecitazione per le componenti della coazione, sono uguali ».

La (17) fornisce il mezzo di costruire le linee di influenza delle caratteristiche della sollecitazione in una generica sezione per coazioni idealmente viaggianti lungo la struttura.

Si voglia, ad esempio, costruire la linea di influenza  $M_{s\mu}$  del momento flettente in una sezione S di un arco a due cerniere per una coazione del tipo  $\mu$  estesa a un tratto a—b (vedi fig. 5). Introdotta in S una cerniera, si considerino agenti sulla struttura così svincolata i due sistemi:

A) Coazione  $\mu$  in un tratto a—b generico (fig. 5 A);

B) Distorsione unitaria positiva in corrispondenza di S (fig. 5 B).

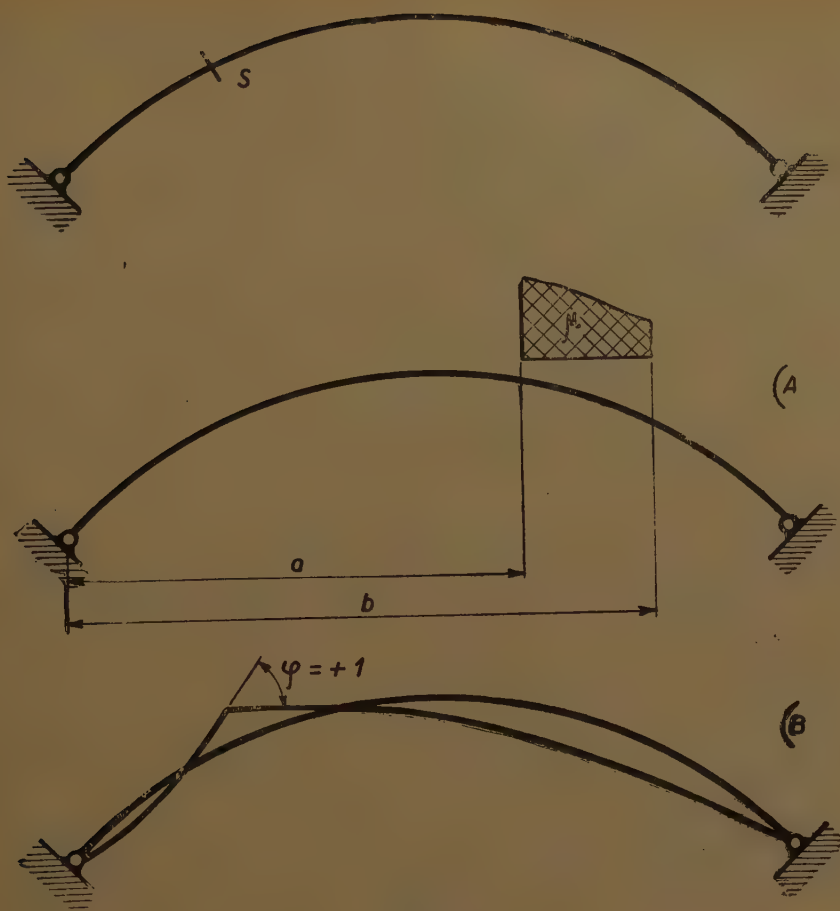


Fig. 5.

La (17) applicata ai due sistemi A e B porge

$$M_{AS} = \int_a^b \mu M_{r|a} \cdot dx \quad (18)$$

Dalla (18) si rileva che il diagramma dei momenti indotti nella struttura dalla coazione  $\Delta\varphi = 1$  in S, è la linea d'influenza del momento in S per coazione del tipo  $\mu$ .

In generale per costruire la linea d'influenza di una caratteristica della sollecitazione in una sezione S per una coazione viaggiante, praticato un taglio in S e collegate le due facce del taglio con un vincolo incapace di trasmettere <sup>1)</sup> la caratteristica della sollecitazione in esame, si applicano due sistemi distorcenti elementari capaci di provocare una distorsione

<sup>1)</sup> E' uso comune, applicando il teorema di LAND, effettuare un taglio completo; più rispondente allo spirito del teorema di BETTI è però il procedimento, usato

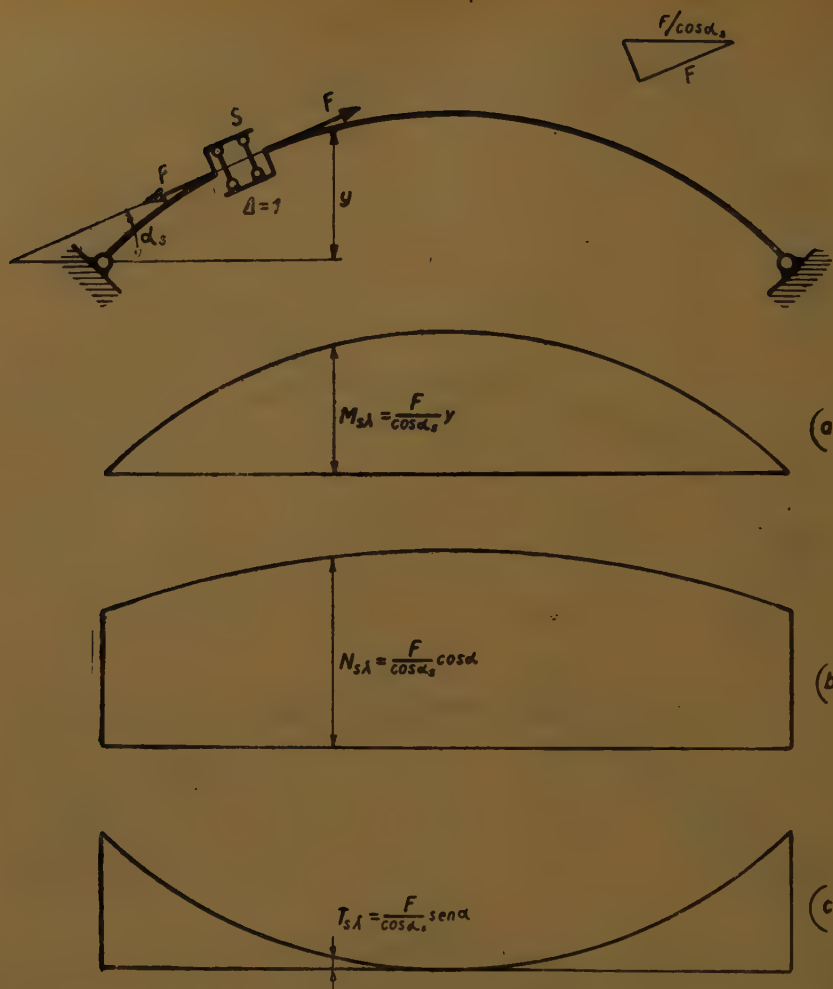


Fig. 6

unitaria positiva relativa tra le facce del taglio. La linea d'influenza ricercata è il diagramma della caratteristica della sollecitazione corrispondente alla coazione viaggiante nel sistema così svincolato e sollecitato.

Si riportano nella fig. 6 le linee di influenza delle caratteristiche  $M, N, T$ , per coazioni del tipo  $\lambda$ , in un arco a due cerniere.

Si utilizza la teoria esposta per determinare la  $H$ , in una struttura MAILLART, verificando, per prima cosa, che nel caso di arco si ritrova la (14). Sostituita la cerniera in B (vedi fig. 1) con un carrello a piano di scorrimento orizzontale, si applica un sistema distorcente (una spinta) capace

dal GALLI [1], di creare una sconnessione semplice. Tutto è così ridotto, in una visione unitaria del problema, all'applicazione del principio fondamentale di reciprocità.

di provocare un avvicinamento unitario tra le imposte dell' arco. Il valore di questa è fornito [4] dalla relazione

$$(19) \quad \frac{8}{15} \frac{Hf^2 l}{K} + \frac{HL}{EA} \frac{m}{m} = I$$

Per il significato dei simboli vedi § 3. Il diagramma dello sforzo normale nell' arco così sollecitato, cioè il diagramma  $H/\cos\alpha$ , dove  $\alpha$  è l' angolo che la tangente all' asse forma con l' orizzontale, è la linea d' influenza della spinta per coazioni viaggianti del tipo  $\lambda$ .

La spinta  $H_t$  causata da una variazione di temperatura uniforme nell' arco é dunque

$$(20) \quad H_t = \alpha \Delta t \Omega = \alpha \Delta t \cdot H \int_0^l \frac{ds}{\cos \alpha} = \alpha \Delta t L_m H$$

dove  $\Omega$  è l' area della superficie d' influenza. Si ritrova, così la (14).

Nel caso generale che l' arco abbia la capacità di reagire a sollecitazioni flessionali, non è più lecito risolvere il problema mediante la sola considerazione delle condizioni di vincolo; bisogna tener conto della congruenza fra montanti e trave, in conformità di quanto si è detto sopra.

Notiamo che il diagramma della  $p(x)$  conseguente alla distorsione unitaria alle imposte è la linea d' influenza della spinta per coazioni del tipo  $\lambda$  dei montanti. Quindi, nel caso di arco sottile, determinata la spinta atta a provocare detta distorsione (determinazione indispensabile per la costruzione della linea di influenza della spinta necessaria al calcolo statico della struttura) e la conseguente  $p(x)$ <sup>1)</sup>, la spinta  $H_t$  è data dalla relazione:

$$(21) \quad H_t = \alpha \Delta t \Omega - \alpha \Delta t y_0 \Omega_0 = \alpha \Delta t L_m H - \alpha \Delta t y_0 \Omega_0$$

dove  $\Omega$  è l' area del diagramma  $H/\cos\alpha$  e  $\Omega_0$  è l' area del diagramma della  $p(x)$ .

La (21), che non tiene conto dell' allungamento elastico dei montanti, risolve il problema.

### 5. Un esempio di calcolo.

Si riportano i dati relativi al progetto di un ponte MAILLART, per l' at-

<sup>1)</sup> E' interessante rilevare che, anche nel caso di arco non sottile, purchè siano soddisfatte le ipotesi d) ed e) di pag. 1, la  $p(x)$  è uniforme se l' arco è parabolico. In questo caso infatti la  $H$  induce nel sistema collaboratore arco-trave un diagramma di momento flettente parabolico, il quale si ripartisce con legge costante tra l' arco e la trave, dando luogo quindi sia nell' uno che nell' altra ad un diagramma di momento parabolico. La  $p(x)$ , come carico distribuito corrisponde ad un momento flettente variabile con legge parabolica, deve essere costante.



traversamento del torrente Corace, eseguito dai proff. GALLI e FRANCIOSI, al quale ha collaborato lo scrivente.

Si tratta, come si vede della fotografia riportata, di una struttura molto snella di 80 m. di luce e 26,10 m. di freccia, nella quale la rigidezza del-

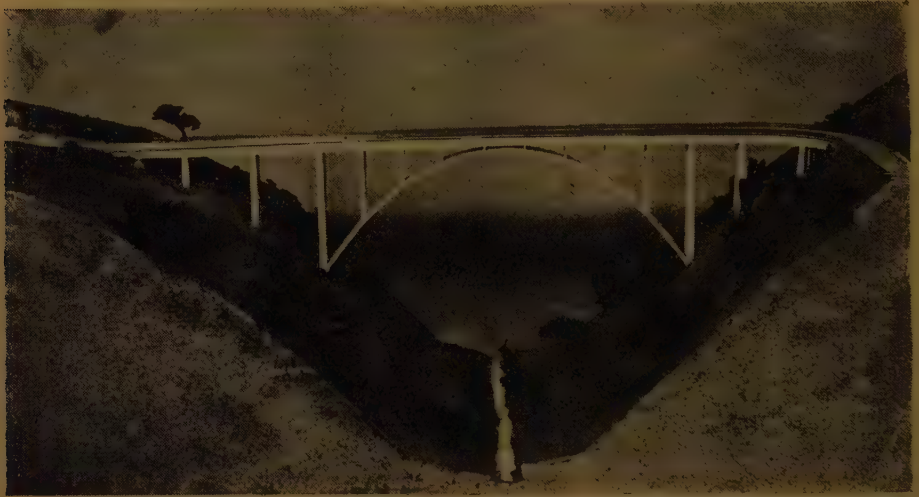


Fig. 7

l'arco è trascurabile in confronto a quella della trave (il loro rapporto è circa 50) per la ricerca delle sollecitazioni di origine termica. Si può quindi applicare la formula (20)

$$H_t = \alpha \Delta t \Omega$$

dove  $\Omega$  è l'area del diagramma  $H/\cos \alpha$ .

La spinta  $H$  necessaria ed avere uno spostamento relativo unitario tra le imposte, calcolata mediante la (19), risulta di 111,538 t/m, essendo

$$\begin{aligned} l &= 80 \text{ m} & K &= 3,2498 \cdot 10^6 \text{ tm}^3 & A_n &= 3,9900 \text{ m}^2 \\ f &= 26,10 \text{ m} & L_m &= 148,121 \text{ m.} & E &= 2 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2 \end{aligned}$$

Nella tabella seguente sono riportati i valori di  $\cos \alpha$  e  $H/\cos \alpha$

$x/l$	0	1/9	2/9	3/9	4/9	1/2
$\cos \alpha$	0,613	0,760	0,883	0,970	0,992	1
$H/\cos \alpha$	181,954	146,761	126,317	114,988	112,438	111,538 t/m

L'area  $\Omega$  risulta di 11.825 t, quindi  $H_t = \alpha \Delta t \Omega = 3,457$  t per :

$$\alpha = 0,00001 \quad \Delta t = 30^\circ\text{C}$$

Conosciuta la  $H_t$ , è immediato il calcolo dei momenti flettenti indotti nella struttura della  $\Delta t$ . Per le sezioni già tabellate risulta :

x/l	0	1/9	2/9	3/9	4/9	1/2	
M	0	40,531	57,523	84,253	92,160	92,676	tm

Napoli, Cattedra di Ponti, Istituto di Scienza delle Costruzioni, febbraio 1953.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] GALLI A. *Scienza delle costruzioni*, Vol. I, Cap. XVI. Napoli, Pellerano, 1952.
- [2] GALLI A. *Instabilità dell'equilibrio elastico*. Scienza delle Costruzioni, Vol. II (In corso di stampa).
- [3] FRANCIOSI V. *Sulle linee di influenza di coazioni*. Industria italiana del cemento, Roma, Marzo 1950.
- [4] FRANCIOSI V. *Sulla caduta di spinta per sforzo normale negli archi sottili ribassati*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, Novembre 1950.

OSSERVAZIONI E CONSIDERAZIONI SUI RECENTI STUDI  
DI SIMBIOLOGIA SPERIMENTALE

*Nota del socio Umberto Pierantoni*

(Adunanza del dì 7 marzo 1953)

**Sunto.** — L' A., prendendo argomento dal recente simposio sulla simbiosi degli insetti coi microrganismi, tenutosi ad Amsterdam in occasione del II Congresso internazionale di Entomologia, e da alcune discussioni ivi avvenute sulla possibilità della digestione del legno e della cellulosa da parte dei protozoi ospitati dall' intestino delle termiti, pone in evidenza alcuni risultati di osservazioni personali, le quali mettono fuor di dubbio che a tale digestione concorrono organelli simbiotici dei protozoi, che compiono coi loro microrganismi l' idrolizzazione e quindi la solubilizzazione di quei resistenti idrati di carbonio, rendendone possibile l' assimilazione da parte dell' insetto. Coglie inoltre l' occasione per ricordare come i recenti progressi degli studii sulla simbiosi fisiologica per quanto riguarda il polimorfismo ed il ciclo evolutivo dei simbiotici e l' elaborazione delle vitamine del gruppo B, e specialmente della Vitamina B<sub>12</sub> da parte di essi, ebbero inizio qui a Napoli con gli studii sperimentali dei suoi allievi TARSIA IN CURIA e GETZEL.

Nel Rendiconto del simposio tenutosi ad Amsterdam, in occasione del IX congresso internazionale di Entomologia, sull' argomento: « Simbiosi degli insetti coi microrganismi <sup>1)</sup> » risultano nel testo delle relazioni e delle discussioni che ad esse seguirono alcune affermazioni di partecipanti le quali dimostrano scarsa conoscenza della letteratura italiana e particolarmente dei miei lavori sull' argomento riguardanti la digestione della cellulosa e del legno operata dai flagellati che vivono nell' intestino delle termiti.

Come è noto, io fin dal 1934 <sup>2)</sup>, in una serie di studii morfologici sulla struttura dei flagellati intestinali dei termitidi italiani e di studii sperimentali sul loro comportamento nella defaunazione di essi termitidi ottenuta col calore e col digiuno, giunsi alla conclusione che in molte specie di flagellati si può constatare la presenza *costante* di organelli simbiotici, costituiti da gruppi di numerosissimi microrganismi tutti uguali e localizzati sempre nella medesima zona plasmatica e talora isolati nella massa proto-

<sup>1)</sup> *Tijdschrift voor Entomologie*, vol. 95, 1952, pp. 23-196.

<sup>2)</sup> v. Arch. Zool. Ital. vol. 22 e 24 (1936 e 1937), nonchè Riv. Fis., Mat. e Sc. Nat., ser. II, anno XV, 1941.

plasmatica a mezzo di membrane. Indizii non lievi dimostrarono, esaminando la letteratura, che in moltissimi casi di protozoi di termitidi esotici si potesse giungere alla stessa conclusione, per quanto, trattandosi di studii puramente sistematici, le speciali colorazioni batteriologiche necessarie per individuare la localizzazione e la natura dei microrganismi fossero state di rado praticate.

Le affermazioni contrarie ad alcune mie interpretazioni sono contenute specialmente nella relazione di P. P. GRASSÉ: « Rôle des flagellés symbiotique chez les Blattes et les Termites » e nella discussione in cui lo stesso autore ha dato ai presenti spiegazioni sulla sua relazione, affermando fra altro che: « PIERANTONI (1934-35) a prétendu que les flagellés digèrent la cellulose non par eux mêmes, mais par les Bactéries symbiotiques qu'ils contiennent. Il est exact que la plupart des flagellés xylophages possèdent des Bactéries intracitoplasmiques, toutefois, sauf de rares cas (*Joenia*), celles-ci ne paraissent pas être constantes. Aucun fait expérimental n'a été avancé en faveur de l'hypothèse de PIERANTONI, et HUN-GATE n'a pas réussi à cultiver les prétendues Bactéries symbiotiques ».

Tali asserzioni del GRASSÉ sono prive di fondamento.

Riguardo alla prima asserzione: non essere cioè i microrganismi, per quanto quasi ovunque presenti, assolutamente costanti nei flagellati delle termiti silofaghe, salvo rari casi (*Joenia*), io rilevo innanzi tutto che tale affermazione non direbbe nulla (anche se fosse esatta), tal quale come nulla dice contro la generale interpretazione data ai batterii simbiotici degli insetti il fatto che non tutti gl'insetti silofagi, o che comunque si nutrono di cellulosa, hanno organi simbiotici; nei quali insetti, quando i microrganismi vi sono, nessuno mette in dubbio che quelle specie che li hanno si servano del loro aiuto per la digestione del legno e della cellulosa. Probabilmente quelli che non ne hanno saranno capaci di elaborare altrimenti i fermenti idrolizzanti e quindi solubilizzanti gli idrati di carbonio insolubili. Lo stesso può presumersi per quei flagellati delle termiti che siano eventualmente privi di microrganismi.

Ma neppure l'affermazione che la presenza *costante* dei batterii, ossia la presenza in tutti gli individui della specie, si riscontri soltanto in *Joenia*. Io ho dimostrato coi miei studii in proposito e pubblicato nei miei lavori di cui sopra, che tale presenza di batterii localizzati in determinate regioni del plasma e tutti della stessa forma, tali da poter essere designati quali comportamenti di organelli simbiotici nel loro complesso, si può affermare, oltre che in *Joenia annectens*, in *Mesojoenia decipiens*, in *Trichonympha minor*, in *Trichonympha agilis* (per quanto riguarda flagellati delle specie di termitidi italiane di cui ho potuto avere un ricco materiale e praticare migliaia di sezioni e moltissime colorazioni specifiche). Per riguardo poi alle specie descritte da altri autori (che non hanno praticato colorazioni specifiche avendo compiuto solo studii sistematici), si può senz'altro



affermare dai dati a disposizione e dalle descrizioni degli autori, che lo stesso si deve concludere (ossia affermare la presenza costante di organelli simbiotici) per *Trichonympha campanula*, *Tr. collaris* secondo gli studii e le microfotografie di KIRBY <sup>1)</sup> e secondo gli studii di questo stesso autore per i flagellati Devescovichini *Caduceia theobromae*, *C. nova* e *Pseudodevescovina ramosa*, oltre che per *Macrotrichomonas pulchra*, nelle quali specie i batterii sono sempre presenti nel capitolo, organello che costantemente si trova in prossimità del nucleo. La costanza dei simbionti in modo da costituire organelli simbiotici è quindi da riscontrare in molti flagellati delle Termiti, e perciò non rara.

Quanto all'altra affermazione del GRASSÉ, della inesistenza di osservazioni sperimentali sulla questione, vediamo brevemente come stanno le cose.

Nel 1935-37 i miei studi sopra citati e quelli d'altri italiani furono eminentemente sperimentali. Io personalmente studiai grado a grado gli effetti sui flagellati e sui batterii simbiotici della defaunazione dei termitidi sia mediante il digiuno, che mediante l'esposizione al calore e potei constatare fatti analoghi alla scomparsa di microrganismi simbiotici che si ottiene con gli stessi mezzi negli insetti, specialmente coleotteri, silofagi (KOCH). Per di più potei assodare da una parte che una delle cause della morte dei protozoi polimastigini provvisti di organello simbiotico (*Joenia annectens* e *Mesojenia decipiens* di *Calotermes* e *Trichonympha agilis* e *Trichonympha minor* di *Reticulitermes*) nella defaunazione per esposizione al calore sta nella degenerazione dell'organello simbiotico che accompagna la scomparsa del contenuto legnoso del plasma dei protozoi e del loro secreto zuccherino e precede la eliminazione dei protozoi stessi dall'intestino. E d'altra parte lo studio del graduale scomparire dei protozoi simbiotici per digiuno, che si compie più lentamente e perciò è più adatto per poterne seguire le fasi, porta ugualmente alla conclusione che, con la mancanza di somministrazione del legno all'insetto e perciò ai protozoi simbiotici, oltre al diminuire e poi scomparire della secrezione zuccherina dei protozoi, si produce ugualmente la degenerazione dell'organello simbiotico, con diffusione degli elementi batterici nella massa del plasma dei protozoi, e con la degenerazione di questi elementi, che in *Mesojoenia* da bastonciniiformi divengono filamentosi, allungati ed aggrovigliati e poi scompaiono del tutto, rendendo i protozoi privi di contenuto batterico ed in seguito spezzettati ed i pezzetti sempre più evanescenti.

Tutte queste osservazioni, che non so come possano chiamarsi se non sperimentali, non conferiscono certo valore alle affermazioni di GRASSÉ, che non vi siano stati studi sperimentali favorevoli alla mia concezione sulla azione della parte batterica dei flagellati nella digestione della cellulosa nei termitidi. Ma oltre che delle osservazioni mie personali occorre ancora tener

---

<sup>1)</sup> v. *Univ. Calif. Publ. Zool.*, vol. 37, 1932 e vol. 43, n. 1, 1938.

conto di quelle di altri studiosi italiani, ignorati, a quanto pare, come le mie dai nuovi studiosi dell'argomento. Ricorderò di sfuggita le osservazioni di MONTALENTI, il quale assodò che le Termiti defaunate possono prolungare la loro vita se nutrite con idrati di carbonio solubili e perciò assimilabili senza bisogno di idrolizzazione <sup>1)</sup>. Sono altresì da segnalare gli studii compiuti da GHIDINI col microrespirometro <sup>2)</sup>. Questo autore, operando con la misura del quoziente respiratorio di termitidi normali e defaunati col calore, ha osservato che questo quoziente con la sua caduta di valore nei defaunati col calore, dimostra il rallentamento dei processi celulosolitici che prima della defaunazione erano normali e consente di ammettere che se in individui così trattati, ossia defaunati, non si è potuto constatare la sussistenza di una nutrizione idrocarbonata, devono attribuirsi proprio ai protozoi ed ai batterii da essi contenuti negli organelli simbiotici i processi degradativi che avvengono negli individui allo stato normale, non potendosi tale degradazione attribuire a tutto il complesso dei batterii contenuti nell'intestino, i quali dopo la defaunazione restano inalterati, anzi aumentano per l'azione del calore, come è risultato dalle mie esperienze.

Si aggiungano a questi studii sperimentali ignorati, od in ogni modo taciuti, dal GRASSÉ le conclusioni favorevoli alla tesi dovute a CLEVELAND ed a TRAGER i quali entrambi, escludendo le qualità celulosolitiche dei microrganismi contenuti nell'intestino e nell'ampolla rettale, le attribuiscono ai protozoi, mentre TRAGER ha ottenuto celulosolisi dalle colture dei flagellati e dal loro corpo spappolato, oltre alle conclusioni ugualmente favorevoli sopra citate di KELLER su *Pelomyxa* invocati da BUCHNER <sup>3)</sup>. Che HUNGATE non abbia ottenuto le colture dei batterii viventi nei flagellati nulla vuol dire, perchè nulla vieta di affermare che i batterii siano coltivabili con medii differenti da quelli usati da questo autore ed il non essere riuscito a coltivarli non vuol dire che non siano coltivabili.

Chi ha pratica oramai circa semisecolare di simbiosi fisiologiche per esserne stato lo scopritore, può ben affermare che, per quanto le modalità possano essere differenti, vi sono profonde analogie nel modo di svolgersi del fenomeno in casi somiglianti e diretti allo stesso scopo. Ora le analogie fra gli organi simbiotici degli animali silofagi stanno nel fatto che ovunque si presenti un nutrimento di natura legnosa e siano presenti gruppi di batterii endocellulari tutti della stessa forma e natura, questi batterii stanno lì per fornire i fermenti necessari alla degradazione ed alla digestione di quei resistentissimi idrati di carbonio (cellulosa e lignina) e che non è stato necessario di ricorrere alle colture ed alla verifica della presenza dei fermenti celulosolitici per affermare che, ad esempio, le larve

<sup>1)</sup> v. *Rend. Acc. Lincei, Cl. Sc. Fis. Mat. Natur.*, Ser. VI. Vol. 6.

<sup>2)</sup> v. *Riv. Biol. Colon.* Vol. 2, 1939.

<sup>3)</sup> v. sopra.

dei cerambicidi che vivono perforando il legno digeriscono il legno stesso con l'aiuto di batterii contenuti negli organi simbiotici di cui sono sempre provvisti. Le colture dei batterii adattati da millenii alla vita endocellulare possono essere anche non attuabili in medii artificiali e se coltivabili possono essere anche non capaci di elaborare le stesse sostanze che elaborano allo stato ormai divenuto naturale del loro ambiente, tal quale come ad es. non rilucono i batterii degli organi luminosi dei pesci fosforescenti *Anomolops* e *Photoblepharon* quando sono coltivati e tuttavia nessuno mette in dubbio che siano essi a produrre la luce allo stato naturale. D'altra parte la presenza costante in molte specie silofaghe di flagellati in gruppi e posizioni costanti per forma e presenza in molte specie, mette fuori dubbio che essi, almeno in quelle specie, costituiscano organelli simbiotici.

Credo pertanto che l'azione di questi organelli di flagellati silofagi delle termiti non sia da mettere neppur lontanamente in dubbio, malgrado le facili obiezioni di qualche recente studioso del fenomeno della simbiosi fisiologica.

Nel rendiconto del simposio di Amsterdam sulla simbiosi negli insetti è contenuta anche una interessante relazione del prof. Anton KOCH in cui sono riassunti i nuovi risultati nel campo della ricerca simbiologica sperimentale, e vengono esposte fra altro le osservazioni mercè le quali si è pervenuti ad accertare verificarsi nei simbionti un succedersi di differenti forme che nelle successive fasi di sviluppo possono assumere i simbionti nel ciclo di sviluppo individuale del loro ospite: ed ivi, a proposito delle attività dei simbionti, viene messa in rilievo anche la loro natura di elementi elaboratori di vitamine del complesso B. Senza per nulla menomare l'interesse di risultati ottenuti in questi due campi coi recenti studii dovuti specialmente ai varii studiosi tedeschi attraverso le colture in particolar modo di simbionti di *Tribolium* e *Pseudococcus*, per quanto riguarda il cambiamento di forma nelle fasi di sviluppo e le vitamine dovuti a GOETSCH, FINK ed altri, non posso mancare di rievocare qui gli studii compiuti fin dal 1934-36 a Napoli dai miei allievi TARSIA in CURIA <sup>1)</sup> e GETZEL <sup>2)</sup>. La TARSIA studiando la simbiosi in *Trioza alacris* perveniva alla descrizione e figurazione del polimorfismo dei simbionti e concludeva che l'infezione delle uova ha luogo per opera di una sola delle forme che assume il simbiote, e precisamente di quella che si trova nei micetociti (cellule del micetoma) e che gli altri simbionti (allungati), posti in quel caso in un sincizio, non partecipano a tale trasmissione, ed estendeva tale conclusione a tutta la famiglia. Del resto io stesso negli studii rimontanti ad oltre

<sup>1)</sup> v. *Archivio Zoologico Italiano*, Vol. XX, 1934.

<sup>2)</sup> v. *Archivio Zoologico Italiano*, Vol. XXIII, 1936, e *Bollettino di Zoologia*, Anno VII n. 4, 1936.



quaranta anni fa, avevo notato che in *Pericerya* gl'individui che si staccano dal micetoma e passano nelle uova sono diversi per forma e colorabilità da quelli che vi restano, tanto che io li interpretavo come spore, e quindi come individui propagatori.

Tutto ciò è stato pienamente confermato dai predetti studii più recenti. Per quanto riguarda l'attività vitaminica dei simbionti ricorderò qui gli studii di GETZEL, che nel 1936 ottenendo attraverso una tecnica prettamente batteriologica la coltura del simbionte d'*Icerya* (*Pericerya purchasi*) ne traeva i germi dalle uova e li descriveva col nome di *Geotrichoides pierantonii*, mentre, in un successivo lavoro, egli ne provava sperimentalmente l'attività vitaminica somministrando il brodo di coltura a colombi neuritici per carenza di cibo vitaminato ed ottenendone la guarigione nel lasso di pochi minuti, ciò che dimostrava l'eccezionale attività vitaminica, delle colture specialmente nella elaborazione della vitamina B<sub>2</sub>, ciò che è confermato dal più recente lavoro di FRÖBRICH <sup>1)</sup>.

Ho voluto brevemente ricordare questi studii, che furono fra i primi a dare un nuovo impulso ai più recenti citati dal KOCH, il quale fin dal 1933 <sup>2)</sup> aveva dimostrato la presenza della vitamina dell'accrescimento.

Con tali evocazioni io credo di aver adempiuto ad un mio precipuo dovere, riportando sulla sua traccia naturale la storia di queste interessanti osservazioni sulle simbiosi degli insetti, le quali vanno dimostrandosi sempre più promettenti di risultati sperimentali ed applicativi.

*Napoli, Dicembre 1952.*

<sup>1)</sup> *Zeitschr. Vergl. Physiol.*, Bd. 27, 1939, p. 335.

<sup>2)</sup> *Naturwissenschaften*, Bd. 21, 1933, p. 543.



PRIMI RISULTATI DELL'INDAGINE GEOFISICA CON IL METODO SISMICO  
A RIFLESSIONE NELLA PIANA DI CATANIA

*Nota del dott. Antonio Lazzari, presentata dal socio G. D' Erasmo*

(Adunanza del dì 2 maggio 1953)

**Sunto.** — Dopo aver richiamato alcune considerazioni fatte dall'A. in altra sede a proposito delle condizioni stratigrafiche e tettoniche della Piana di Catania, vengono fornite notizie sui recenti risultati conseguiti con l'applicazione del metodo sismico a riflessione in quella zona. Le indagini geofisiche ivi condotte confermano che le condizioni tettoniche sono normali; difatti, le serie stratigrafiche capaci di dare ottime riflessioni si sviluppano fino a profondità di almeno 1500-2000 m., mostrando in tal modo di essersi sedimentate in posto, e di non avere quindi partecipato passivamente a quei grandiosi movimenti di scivolamento gravitativo voluti da talune recenti teorie sulla tettonica della Sicilia.

In una mia nota presentata al VII Convegno Nazionale del Metano e del Petrolio <sup>1)</sup> tenutosi a Taormina nell'aprile 1952, ho dato notizia del complesso di lavori geologici e geofisici, nonchè di esplorazione meccanica del sottosuolo, condotti dall'E. S. V. A. I. S. O. <sup>2)</sup> nella Piana di Catania a seguito della impostazione da me data al problema della ricerca degli idrocarburi in quella zona, esponendo altresì le mie vedute sulla situazione stratigrafica e tettonica di quella parte della Sicilia sud-orientale, nella quale, in base agli studi da me condotti, ritenevo di dovere escludere il verificarsi di talune moderne idee sulla tettonica della Sicilia, ed ammettevo una condizione di giacitura normale delle serie terziarie, ed in particolare di quelle neogeniche alle quali, per l'area suddetta riconoscevo notevole interesse geo-petroliifero.

Successivamente, in altra nota che in certo qual modo si riferiva ai lavori del citato Convegno <sup>3)</sup> richiamaivo l'attenzione sulle conseguenze che ne sarebbero derivate nei confronti della ricerca degli idrocarburi in

---

<sup>1)</sup> LAZZARI A., *Prospettive della piana di Catania per la ricerca degli Idrocarburi e primi risultati conseguiti dall'E. S. V. A. I. S. O.* Atti VII Conv. Naz. Metano e Petrolio, Taormina, 21-24 aprile 1952. Palermo, 1953.

<sup>2)</sup> Ente Studi Valorizzazione Agricola Industriale Sicilia Orientale.

<sup>3)</sup> LAZZARI A., *Alcune considerazioni in merito al problema della ricerca degli Idrocarburi in Sicilia.* Mem. e Note Ist. Geol. Appl. Univer. Napoli, Vol. IV, 1951. Napoli, 1952.

molte parti di quell' Isola, nel caso che le idee tettoniche da me non condivise fossero risultate effettivamente esistenti, in quanto la individuazione delle condizioni strutturali favorevoli allo accumulo degli idrocarburi sarebbe stata estremamente difficile od addirittura impossibile, risultando inadeguati i vari metodi di indagine geofisica normalmente applicati per la localizzazione delle strutture positive; e, ritenendo che solo l' applicazione del metodo sismico a riflessione avrebbe potuto dirimere ogni dubbio sulla tettonica delle serie neogeniche (da taluni considerate parautoctone) auspicavo che tale tipo di indagine venisse convenientemente utilizzato nelle zone oggetto di discussione. Davo infine notizia della decisione presa dall' E. S. V. A. I. S. O., per mio consiglio, di iniziare entro breve tempo una campagna sismica nella Piana di Catania, sulla quale quell' Ente detiene permesso di ricerca per gli idrocarburi.

Circostanze varie hanno fatto ritardare l' inizio di tali lavori, che sono stati poi condotti, in via preliminare, per circa 40 giorni nel periodo novembre-dicembre 1952, fornendo risultati del massimo interesse geologico e, conseguentemente, aprendo prospettive pratiche assai incoraggianti, salvo, beninteso, quanto potrà dire la ulteriore applicazione della sismica a riflessione quando la prospezione sarà condotta a termine.

Data la notevole importanza teorica e pratica del problema, ritengo opportuno esporre qui brevemente, con il gentile consenso dell' E.S.V.A.I.S.O., i primi risultati conseguiti, tentando poi di trarne qualche deduzione di carattere generale.

La campagna di prospezione sismica è stata condotta da una squadra della Società ASKANIA-PRAKLA di Berlino, la quale, nonostante le condizioni, tutt' altro che favorevoli per il lavoro, presentate dalla zona, ha pienamente soddisfatto sia per il rendimento quantitativo che per la condotta della ricerca.

Considerazioni di carattere pratico hanno consigliato di effettuare questo primo periodo di rilevamento sismico prevalentemente nella porzione occidentale della Piana di Catania, in corrispondenza della quale, in base alle osservazioni di superficie, era stata da me prevista la esistenza di una struttura positiva, interessando la zona con alcune sezioni sismiche; inoltre, una certa attività di ricerca è stata anche svolta nella porzione centrale della Piana, ove sono state eseguite due sezioni con orientamento N—S, trasversali, quindi, alle direttrici tettoniche di questa parte dell' Isola.

Per quanto ragioni di comprensibile riservatezza non consentano di illustrare per esteso i risultati conseguiti, pure mi è possibile fornire le notizie essenziali sulle condizioni accertate per il sottosuolo dell' area esplorata, per la quale viene riconosciuta una situazione perfettamente rispondente alle previsioni da me formulate con la prima delle mie note citate.

E' stato infatti accertato che le serie stratigrafiche esistenti nel sotto-

suolo della porzione occidentale della Piana di Catania, si trovano in condizioni tali da potere fornire riflessioni, anche ottime, fino alla profondità di m. 1500-2000 ed oltre, regolarmente ordinate in guisa tale che è persino possibile seguire qualche orizzonte caratteristico per la peculiarità delle rispettive riflessioni, quali vengono registrate sui sismogrammi. Una tale situazione è chiaramente mostrata nella allegata fig. 1, che rappresenta un

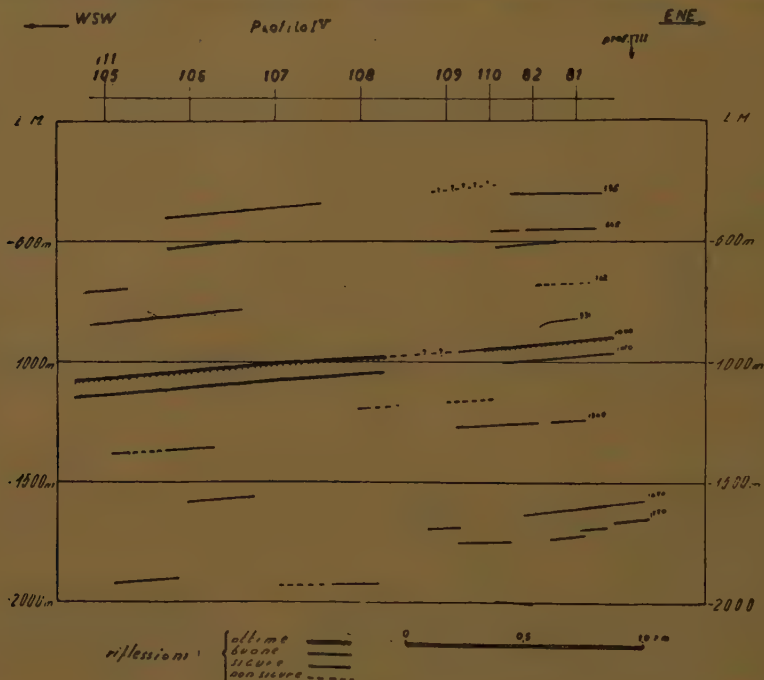


Fig. 1.

tratto della sezione sismica IV, eseguita circa 5 Km. a NNW di Ramacca (Catania), con orientamento WSW-ENE. La risalita degli strati riflettenti verso quest' ultima direzione accenna al fianco occidentale della struttura prevista e che risulta confermata anche da altre sezioni eseguite nell' ambito della zona.

L'interpretazione stratigrafica di tali risultati non è ancora possibile in via definitiva, non disponendo dei dati di sondaggi sufficientemente profondi da potere consentire la datazione dei vari complessi di riflessioni. Di un certo ausilio sono peraltro le indicazioni a suo tempo fornite da un sondaggio effettuato in località Mendolo, a nord di Ramacca, dallo E. S. V. A. I. S. O. Tale perforazione, impostata sulle argille tortoniane <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> La carta geologica ufficiale in scala 1:100.000 presenta qui alcune inesattezze. Così vengono attribuite all' Eocene, con il nome di argille scagliose le argille salifere tortoniane che vi affiorano su vasta area in giacitura regola-

ha attraversato questa serie per circa 400 m. senza uscirne. Tenendo quindi presenti le conoscenze generali che si hanno sulle serie mioceniche della Sicilia sud-orientale, non sembra azzardato ammettere che i primi 1000 m della serie risultante nella sezione che si presenta, possano rappresentare il complesso Tortoniano-Elveziano alla cui base le due riflessioni caratteristiche (segnate con tratto grosso) potrebbero stare ad indicare il passaggio al sottostante Langhiano che forse si presenta anche qui con una facies calcareo-marnosa, probabilmente meno atta a dare riflessioni altrettanto significative.

Comunque, è bene tener presente che quel che qui importa soprattutto mettere in evidenza è la buona rispondenza delle varie serie stratigrafiche alla indagine sismica. Ciò sta indubbiamente ad indicare che esse serie non hanno subito particolari disturbi tettonici, essendo noto che sempre che le vicissitudini tettoniche siano complesse, i terreni sedimentari non rispondono affatto, o rispondono solo per qualche breve tratto, alla prospezione sismica; difatti, il disordine nel quale vengono a trovarsi i gruppi di strati, determina l'assorbimento dell'energia elastica provocata dallo scoppio, o quanto meno essa energia viene disordinatamente riflessa, senza che possa pervenire in superficie in modo da essere raccolta dai geofoni piazzati sul terreno.

Anche per le aree centrali della Piana di Catania, ove sono state eseguite due sezioni sismiche con orientamento approssimativo N-S, i risultati conseguiti confermano i presupposti che avevano suggerito l'adozione della prospezione sismica, svelando la esistenza di serie regolarmente ordinate, capaci di fornire ottime riflessioni che nel loro insieme mostrano (come previsto in base ai risultati della prospezione condotta con il metodo delle correnti telluriche, di cui ho fornito notizie nella citata nota <sup>1)</sup>) un andamento monoclinale, con immersione degli strati verso nord, talora interrotto da qualche faglia che potrebbe avere determinato favorevoli condizioni per un eventuale accumulo degli idrocarburi. La fig. 2 mostra la situazione innanzi descritta, quale risulta su una porzione della sezione sismica VI, a proposito della quale va tenuto presente che la mancanza di riflessioni nella porzione più profonda non può essere ancora attribuita alla presenza delle serie del terziario inferiore, in facies di Flysch, generalmente molto disturbate e quindi poco propizie a dare riflessioni, ma potrebbe anche dipendere dalla presenza di una serie calcarea (eventualmente del tipo « ragusano ») pure essa poco atta a riflettere l'energia elastica provocata dallo scoppio in superficie.

Ritengo infine opportuno sottolineare il fatto che i risultati della pro-

---

rissima, e la cui datazione non può dar luogo a dubbi di sorta per la presenza di caratteristiche microfaune e per la loro posizione, in concordanza stratigrafica, al di sotto della formazione gessoso-solfifera.



spezione a suo tempo condotta con l'adozione del metodo delle correnti telluriche, effettuata dalla *Compagnie Générale de Géophysique* di Parigi per conto dell' E. S. V. A. I. S. O., sono in buon accordo con i dati ora forniti dalla sismica a riflessione.

Nel complesso, quindi, già da questa prima fase di applicazione del

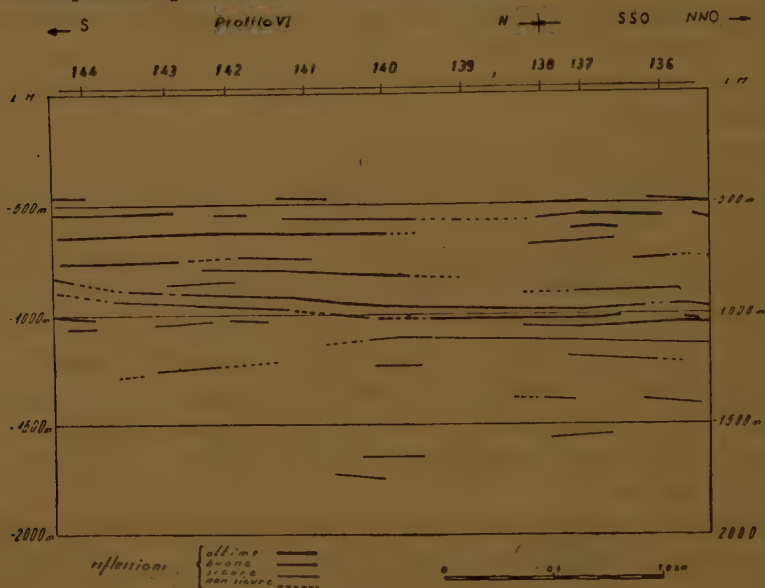


Fig. 2.

metodo sismico risultano pienamente confermate le previsioni da me formulate per la Piana di Catania, sia per quanto si riferisce alla integrità delle serie neogeniche, quanto per il loro sviluppo, nonchè per le incoraggianti prospettive (che peraltro necessitano, come è ovvio, di ulteriori indagini e precisazioni) che tale zona offre per la ricerca degli idrocarburi.

*Napoli, Istituto di Geologia dell' Università, Aprile 1953.*

## CONSIDERAZIONI SUGLI ARCHI TIPO BOUSSIRON — LA VALLETTE

*Nota del prof. Vincenzo Franciosi, presentata dal socio ord. A. Galli*

(Adunanza del dì 4 aprile 1953)

**Sunto.** — Si stabiliscono i limiti entro cui la profilatura con momenti d'inerzia crescenti dalle imposte alla chiave vale a ridurre gli effetti statici del ritiro, delle variazioni termiche e dell'accorciamento per sforzo assiale in un arco incastrato

**Premessa.** L'arco tipo BOUSSIRON-LA VALLETTE è un notevole esempio dei vantaggi che si possono conseguire ripudiando coraggiosamente le vie classiche per muovere più speditamente alla ricerca di nuovi schemi strutturali più adeguati alle caratteristiche del materiale e alla natura delle sollecitazioni cui esso è soggetto. Il tipo di arco di cui si tratta in questa nota apparve nel 1934 nel ponte di La Roche-Guyon sulla Senna.

E' questo un ponte a via intermedia, con implacato sorretto da due archi gemelli a cassone (luce 164 m, freccia 23 m) incastrati, e progettati in modo da presentare momenti d'inerzia crescenti dalle imposte alla chiave. E' questa appunto la coraggiosa innovazione che rende il ponte di La Roche Guyon tanto interessante; invertendo infatti, per così dire, la classica legge di variazione dei momenti d'inerzia degli archi incastrati, si ottengono sensibili diminuzioni negli effetti statici del ritiro, delle variazioni termiche uniformi e degli accorciamenti per sforzo assiale. La diminuzione di altezza all'imposta porta alla necessità di incrementare l'ampiezza dell'arco nella stessa zona, per non superare i limiti consentiti alle sollecitazioni unitarie; questo allargamento in pianta non è però causa di difficoltà nei ponti a via intermedia, nei quali può aver luogo al di sotto del piano stradale.

Dal punto di vista statico è da notare che negli archi del tipo suddetto un vantaggio si contrappone ad uno svantaggio: l'aumento di rigidità in chiave, mentre rende meno imperiosa la necessità delle travi di controvento, sempre antiestetiche, potendosi in alcuni casi giungere addirittura alla loro soppressione, porta invece, a parità di pesi elastici complessivi, ad una diminuzione del valore critico della spinta.

Dal punto di vista estetico non si condividono le preoccupazioni dei progettisti che mascherarono con ali non reagenti l'eccessiva diminuzione dell'altezza dell'arco alle imposte: almeno in tema di architettura è concetto ormai affermatosi da tempo che l'utile è bello, e viceversa.

E' scopo di questa nota lo sviluppo di qualche considerazione teorica circa il comportamento statico degli archi alla Boussiron, nei riguardi appunto delle cosiddette coazioni lineari.

2) — *Le linee d'influenza della spinta orizzontale per coazioni viaggianti in un arco tipo Boussiron.* Le linee d'influenza per coazioni viaggianti non differiscono qualitativamente per un arco tipo BOUSSIRON da quelle per un normale arco incastrato. Interessano, nel caso in esame, le linee d'influenza  $h_\mu$  e  $h_\lambda$  della spinta orizzontale  $H$  per coazioni del tipo  $\mu$  (rotazione relativa) e  $\lambda$  (spostamento assiale relativo). Le  $h_\mu$  e  $h_\lambda$  sono fornite rispettivamente dai diagrammi dei momenti flettenti e degli sforzi normali provocati da una distorsione della sezione d'imposta  $A$  per cui la spinta  $H=+1$  compia un lavoro positivo unitario, e le altre caratteristiche della reazione compiano invece lavoro nullo.

Poichè tale distorsione è una traslazione unitaria della sezione  $A$  verso l'interno (la spinta  $H$  è considerata positiva verso l'interno) la reazione da essa generata è una forza orizzontale, passante per il baricentro elastico  $G$  e di intensità.

$$R = \frac{1}{\rho_{x_0}^2 \cdot \Omega}$$

dove  $\rho_{x_0}$  è il semiasse verticale dell'ellisse di elasticità, e  $\Omega$  il complesso dei pesi elastici dell'arco.

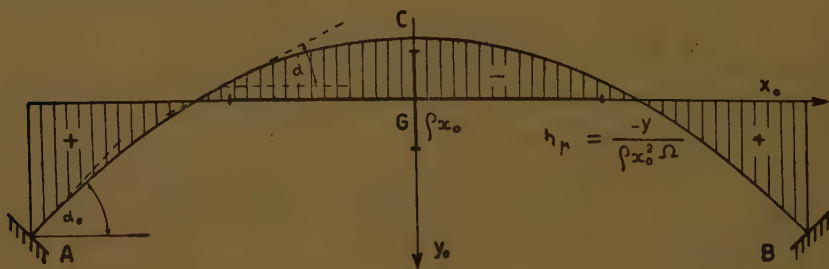


Fig. 1.

Le linee  $h_\mu$  ed  $h_\lambda$  coincidono con i diagrammi dei momenti flettenti e degli sforzi normali provocati dalla  $R$ , e cioè (fig. 1 e 2)

$$(1) \quad h_\mu = - \frac{y}{\rho_{x_0}^2 \cdot \Omega}$$

$$(2) \quad h_\lambda = - \frac{\cos \alpha}{\rho_{x_0}^2 \cdot \Omega}$$

dove  $y$  è la distanza del baricentro della sezione generica dall'asse orizzontale  $x_0$  passante per il baricentro elastico, e  $\alpha$  l'angolo che la tangente all'asse dell'arco in corrispondenza della sezione generica forma con l'orizzontale. In relazione con i segni si avverte che lo sforzo normale è inteso positivo se di trazione, il momento flettente se è tale da tendere le fibre inferiori, la coazione  $\mu$  se corrisponde ad una rotazione oraria della faccia di destra rispetto a quella di sinistra (per essa il momento positivo compie un lavoro positivo), la coazione  $\lambda$  se corrisponde ad un allontanamento delle due facce (per essa lo sforzo normale positivo compie un lavoro positivo).

In un arco alla BOUSSIRON, come si mostrerà nel paragrafo seguente,

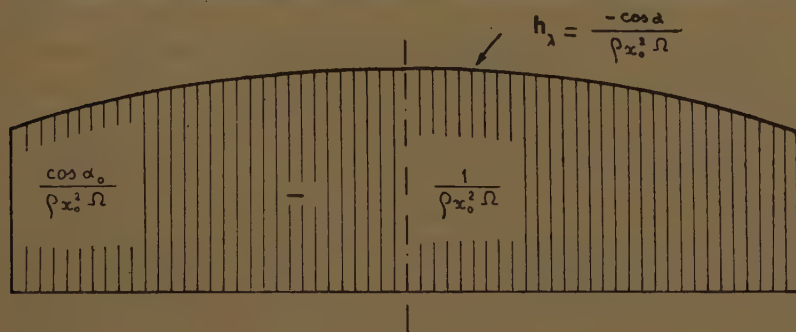


Fig. 2.

$\rho_{x_0}$  risulta notevolmente più grande di quello che si verifica in un arco di pari  $\Omega$ , ma profilato alla maniera classica, e cioè con i momenti d'inerzia crescenti dalla chiave alle imposte; poichè  $\rho_{x_0}$  compare al denominatore della espressione (2), si può dire che in un arco siffatto gli effetti sulla  $H$  delle coazioni del tipo  $\lambda$  (ritiro, variazione termica uniforme, accorciamento per sforzo assiale) sono senz'altro diminuiti.

Anche per l'espressione (1)  $\rho_{x_0}$  compare al denominatore; inoltre la  $h_\mu$ , poichè il baricentro  $G$  in un arco alla Boussiron é ubicato più in basso che in un arco normale, presenta aree negative più ampie in rapporto alle positive. L'effetto sulla  $H$  di una distorsione  $\Delta_\phi$  è quindi sicuramente ridotto se essa è applicata al di sotto della  $x_0$ , perchè in questa zona la  $y$  della formula (1) è minore di quanto si avrebbe in un arco profilato normalmente, e il  $\rho_{x_0}$  maggiore; non altrettanto può dirsi per una distorsione  $\Delta_\phi$  applicata al di sopra della  $x_0$ , poichè in questo caso sia  $y$  che  $\rho_{x_0}$  sono maggiori.

Se, in particolare, la distorsione del tipo  $\mu$  è dovuta ad una variazione termica  $\Delta t'$  fra l'intradosso e l'estradosso, nell'arco tipo Boussiron essa è, nelle zone vicinanza della chiave, maggiore, e in quelle prossime alle imposte minore dei valori corrispondenti ad un arco normale, dipendentemente dalla diversa legge di variazione dell'altezza. Poichè questo effetto



è contrario, a quello dovuto alla differenza delle  $y$ , non si può dire a priori se in un arco alla Boussiron la spinta indotta da una variazione termica  $\Delta t'$  variabile lungo l'altezza sia ridotta o esaltata. In questo caso però l'effetto più cospicuo si risente sul momento  $M$  riferito al baricentro elastico. La linea d'influenza di  $M$  per coazioni del tipo  $\mu$  presenta ordinata costante pari ad  $\frac{1}{\Omega}$ : quindi i momenti  $M$  generati da una  $\Delta t'$ , in due archi di pari  $\Omega$  non differiscono che in relazione alla diversa distribuzione delle altezze, e cioè poco sensibilmente.

3) — *Variazione del raggio verticale dell'ellisse d'inerzia, ottenuta con il profilo alla Boussiron.*

Il peso elastico di un concio elementare lungo  $ds$  sia indicato con  $d\omega = w ds$ ; la  $w$  è una funzione  $w(s)$  dell'ascissa curvilinea  $s$  dell'asse dell'arco.

Si supponga di passare dall'arco con profilo normale all'arco con

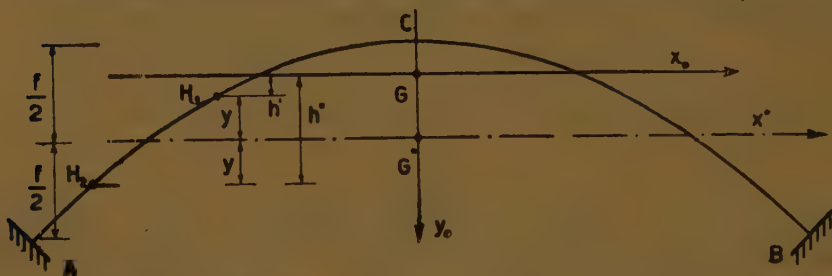


Fig. 3.

profilo alla Boussiron. di uguale curva d'asse ed uguale peso elastico complessivo  $\Omega$ , trasferendo dei pesi elastici  $d\omega$  dalla generica quota  $y$  rispetto all'orizzontale  $x^*$  condotta per il punto medio  $G^*$  della freccia alla quota  $y$  (fig. 3). Nel passaggio di uno di questi pesi elastici elementari  $d\omega$  da  $H_1$  ad  $H_2$ , il momento d'inerzia  $I_{x_0}$  rispetto all'orizzontale  $x_0$  per il baricentro elastico  $G$  varia, a meno d'infinitesimi di ordine superiore, della quantità

$$(3) \quad dI_{x_0} = -d\omega \cdot h'^2 + d\omega \cdot h''^2 = d\omega(h''^2 - h'^2)$$

Si nota dalla (3) che, finchè il baricentro elastico  $G$  si trova al di sopra di  $G^*$ , e cioè lungo la semifreccia superiore,  $h'' > h'$ , e  $dI_{x_0} > 0$ ; quindi, passando da un arco normale ad un arco alla Boussiron,  $I_{x_0}$  e  $\rho_{r_0}$  aumentano. Il momento  $I_{x_0}$  raggiunge per il massimo per  $dI_{x_0} = 0$ , e cioè quando il baricentro elastico raggiunge il punto di mezzo  $G^*$  della freccia. Continuando a trasferire pesi elastici dalle zone al di sopra di  $x^*$  in quelle al

di sotto,  $I_{x_0}$  diminuisce; non conviene quindi far scendere  $G$  al di sotto di  $G^*$ .

Si può passare dall'arco normale a quello BOUSSIRON seguendo una legge diversa da quella adottata, ad esempio la orizzontale rispetto alla quale si spostano per simmetria i pesi elastici  $d\omega$  può tagliare la  $f$  al di sopra o al di sotto del suo punto medio. In questo caso la condizione di massimo momento d'inerzia  $I_{x_0}$  varia, poichè, dovendo la funzione  $I(s)$  mantenersi uniformemente crescente o decrescente dalla chiave alle imposte, non si può, con il solo trasferimento di pesi elastici  $d\omega$  dalle quote  $y$  alle  $y$ , ottenere un profilo dall'altro.

4) — *Conclusioni.* L'effetto benefico della profilatura alla BOUSSIRON si risente attraverso la variazione del raggio verticale  $\rho_{x_0}$  dell'ellisse di elasticità e non attraverso l'abbassamento del baricentro elastico  $G$  o lo incremento dei pesi elastici alle imposte, come alcune volte si afferma.

Uno studio comparativo fra un arco normale ed un arco tipo BOUSSIRON non si può infatti eseguire che a parità di pesi elastici complessivi, poichè per necessità di cose l'incremento dei pesi elastici nelle zone prossime alle imposte porta ad una diminuzione degli stessi nelle zone attigue alla chiave.

Più importante è, infine, rilevare che, a parità di curva d'asse e di pesi elastici complessivi, esiste una distribuzione di questi ultimi per cui  $\rho_{x_0}$  raggiunge il massimo; non conviene quindi che questo limite sia superato.

*Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni, 1953.*

ABBONDANZA E DEFICIENZA DI PIOGGIA DAL 1949 AL 1951  
TEMPERATURE STRAORDINARIE NELL' ESTATE DEL 1952

*Nota di Eugenio Guerrieri, presentata dal socio corr. A. Colacevich*

(Adunanza del dì 2 maggio 1953)

**Sunto.** — Si esaminano due anomalie del clima di Napoli dal 1949 al 1952, riguardanti: a) l'abbondanza e la deficienza di pioggia dal 1949 al 1951; b) le temperature straordinarie nell'estate del 1952.

Esse sono il sèguito di altre due recenti anomalie climatiche discusse in questi stessi Rendiconti (serie 4<sup>a</sup>, volume XVIII, 1951).

Le due anomalie climatologiche, oggetto della presente Nota, giusta le osservazioni meteorologiche di Napoli (Capodimonte), sono il sèguito immediato di altre due pubblicate nel 1951 <sup>1)</sup> in questi stessi Rendiconti. Esse riguardavano la siccità eccezionale persistente per 9 mesi (novembre 1948-luglio 1949); le straordinarie ed elevate temperature dell'aria nella primavera estiva e nell'estate torrida del 1950.

Si mettono ora in rilievo:

- a) l'abbondanza e la deficienza della pioggia dal 1949 al 1951;
- b) le temperature straordinarie nell'estate del 1952.

— A —

Il territorio campano in generale e la città di Napoli in particolare hanno subito il minimo dei danni imperversati in tutta la penisola italiana durante lo scorcio dell'anno 1950 e l'inverno dell'anno successivo. In tale intervallo di tempo le cronache giornaliere hanno registrato piogge torrenziali senza interruzione, inondazioni, straripamenti fluviali, temporali, uragani, continue ed abbondanti nevicate e conseguenti disastri nel precipitare di valanghe. L'incrudire di tali calamità si è soprattutto verificato in vaste zone del centro-settentrione d'Italia e soltanto limitatamente nelle regioni meridionali.

L'anormalità dell'eccessiva pioggia a Napoli si riscontra principalmente nel dicembre 1950 e nel gennaio 1951, col superlativo ammontare in questi due mesi di 424 mm, pari a circa la metà della pioggia annua

---

<sup>1)</sup> Eugenio GUERRIERI, *Anomalie climatologiche osservate a Napoli tra il 1948 ed il 1950.* — Contributi Geofisici dell'Osservatorio di Capodimonte (Serie II, N. 11).

normale a Napoli, e con un eccesso nel bimestre di mm 205. Ma ciò è accaduto in due mesi invernali e non sorprende quanto sorprendono le piogge eccezionali dell'estate e dell'autunno 1949: infatti dall'agosto al novembre di tale anno si è registrata, alla Stazione meteorica di Capodimonte, pioggia per un'altezza di 512 mm, mentre il totale normale è di mm 343, con un'eccedenza di mm 179. Tra questi due periodi di piogge abbondanti notevole ne è la deficienza per un intero anno, dal dicembre 1949 al novembre 1950, quale risulterà dalla Stazione dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte. Dai registri di tale Istituto si sono trascritte le altezze (in mm e frazioni) della pioggia caduta giornalmente, l'ammontare totale di quella osservata nelle ore regolamentari delle tre osservazioni diurne. E ciò a partire dall'agosto del 1949, fine della eccezionale e persistente siccità precedentemente trattata, iniziata dal novembre 1948. Ne è risultata la tavola I in cui sono notate, dall'agosto 1949 al marzo 1951, le altezze di pioggia (P) ed il numero dei giorni piovosi (G P), per decenni e per mesi di tale intervallo di tempo. Nella successiva tavola II i totali pluviometrici mensili, ottenuti per le altezze di pioggia in mm, si sono trascritti al disotto di ogni mese, corrispondentemente all'anno in cui si sono verificati; seguono con (N) le medie altezze di pioggia caduta normalmente a Capodimonte negli ultimi 80 anni; ed infine sono notate le deviazioni ( $\Delta$ ), che più interessano, sia i millimetri di pioggia raccolta nell'intervallo (agosto 1949-marzo 1951) ed i corrispondenti valori normali N. Dalle due tabelle numeriche si rileva a vista quanto segue:

a) Immediatamente dopo la persistente ed eccezionale siccità, dal novembre 1948 al luglio 1949, si riscontra fin dall'agosto di quest'ultimo anno, e per la durata ininterrotta di quattro mesi consecutivi (estivi-autunnali), una copiosa quantità di pioggia; e maggiormente nell'agosto con una quantità circa quadrupla di quella normale: nel quadrimestre l'importo complessivo degli scostamenti  $\Delta$  è di mm 169.

b) Per l'intero anno successivo, cioè dal dicembre 1949 al novembre 1950, si sono verificati ben dieci scostamenti  $\Delta$  negativi, escluso quello del settembre (+13) e quello del febbraio (nullo); cioè per dieci mesi l'altezza della pioggia caduta nel suddetto intervallo è stata di ben 219 mm inferiore a quella normale di Capodimonte: sono notevoli due mesi invernali di scarsissima piovosità, di 61 mm in meno nel dicembre e di 48 mm nel marzo.

c) Tale straordinaria deficienza di pioggia viene dopo ampiamente compensata dai quattro mesi successivi, dal dicembre 1950 al marzo 1951, durante i quali l'eccesso complessivo della pioggia rispetto a quella normale è di mm 216; eccesso dell'ultimo quadrimestre che compensa esattamente la scarsità dell'anno precedente. Ma più impressionante e più memorabile è la pioggia straordinaria caduta nel dicembre 1950 con l'importo di 287 mm e con un eccesso sulla normale di 166 mm; tale importo



TAVOLA I

AGOSTO 1949 — MARZO 1951

I II III . . . decadi M . . . mese

P . . . altezza di pioggia in mm

GP . . . numero dei giorni piovosi

1949	P	GP	1950	P	GP	1950	P	GP
Agosto I	8	1	Gennaio I	2	1	Giugno I	6	2
II	88	7	II	47	6	II	2	1
III	—	—	III	26	6	III	20	2
M	96	8	M	75	13	M	28	5
Settembre I	92	1	Febbraio I	37	5	Luglio I	—	—
II	8	4	II	9	3	II	—	—
III	1	1	III	27	6	III	—	—
M	101	6	M	73	14	M	—	—
Ottobre I	123	5	Marzo I	2	1	Agosto I	—	—
II	9	1	II	1	1	II	18	1
III	16	3	III	20	3	III	—	—
M	148	9	M	23	5	M	18	1
Novembre I	71	7	Aprile I	8	2	Settembre I	50	3
II	45	8	II	10	3	II	10	3
III	51	6	III	37	3	III	29	2
M	167	21	M	55	8	M	89	8
Dicembre I	7	2	Maggio I	1	1	Ottobre I	1	1
II	51	6	II	37	2	II	11	1
III	2	1	III	5	1	III	102	7
M	60	9	M	43	4	M	114	9

TAVOLA I (*seguito*)

1950	P	GP	1951	P	GP	1951	P	GP
Novembre I	48	7	Gennaio I	28	4	Marzo I	64	6
II	21	7	II	39	5	II	2	2
III	24	5	III	70	6	III	7	5
M	93	19	M	137	15	M	73	13
Dicembre I	56	4	Febbraio I	13	3			
II	129	10	II	15	5			
III	102	8	III	54	7			
M	287	22	M	82	15			

TAVOLA II

Mesi	VIII	IX	X	XI
1949	96	101	148	167
N	25	76	127	115
$\Delta$	+ 71	+ 25	+ 21	+ 25

Mesi	XII	I	II	III	IV	V
1949-1950	60	75	73	23	55	43
N	121	98	73	71	67	55
$\Delta$	- 61	- 23	- 0	- 48	- 12	- 12

Mesi	VI	VII	VIII	IX	X	XI
1950	28	0	18	89	104	93
N	35	17	25	76	127	115
$\Delta$	- 7	- 17	- 7	+ 13	- 23	- 22

Mesi	XII	I	II	III
1950-1951	287	137	82	73
N	121	98	73	71
$\Delta$	+ 166	+ 39	+ 9	+ 2

rappresenta la terza parte della pioggia normale dell'intero anno: anche il numero (22) dei giorni piovosi in tale mese è molto superiore al normale (14).

d) Da quanto si è esposto risulta un'alternanza tra eccesso e deficienza di pioggia nell'ultimo triennio, come si vede dal quadro seguente le cui due ultime colonne danno gli scostamenti dell'ammontare di pioggia e del numero di giorni piovosi dai valori normali:

Novembre 1948	—	Luglio 1949	—	444	—	52
Agosto 1949	—	Novembre 1949	+	169	+	7
Dicembre 1949	—	Novembre 1950	—	219	—	21
Dicembre 1950	—	Marzo 1951	+	216	+	15

Rimarchevole è la straordinaria preminenza della estrema siccità del primo periodo.

e) Segnaliamo infine le maggiori altezze delle piogge diurne nei due quadrimestri

1949	Agosto 18	mm 65		1950	Dicembre 10	mm 57
	Settembre 10	« 92		1951	Gennaio 29	« 24
	Ottobre 9	« 39			Febbraio 28	« 17
	Novembre 7	« 32			Marzo 7	« 29

La pioggia caduta il 10 Settembre rappresenta oltre la decima parte di quella che normalmente cade a Capodimonte nell'intero anno.

Da ultimo non tralasciamo una considerazione circa il periodo alternativo dell'abbondanza e della scarsità di pioggia a Napoli.

Nella precedente nota citata si osservava che negli ultimi 80 anni (1866-1945) le deviazioni dell'altezza media annuale della pioggia a Capodimonte (mm 875) dalle singole altezze annue non progredivano disordinatamente, ma si presentavano in gruppi (di 4 o 5 anni), in parte positivi ed in parte negativi; ossia gruppi quinquennali di annate piovose si alternavano con gruppi di annate di notevole siccità. Si notava poi che nel quinquennio (1944-1948) il raggruppamento in esame non si verificava, e l'alternanza di pioggia abbondante e scarsa in tale quinquennio succedeva invece annualmente. Si osserva ora, da quanto presentemente si è concluso, che tale alternanza annua si è prolungata anche per gli ultimi anni, a partire dal 1949.

Al pari dell'estate del 1950, quella del 1952 è stata caldissima, con la differenza che la prima si è manifestata molta precoce e di lunga durata,

mentre la seconda comprende i soli tre mesi estivi e la prima pentade di settembre. Le temperature dell'aria del 1952 furono superiori alle normali sin dall'aprile, proseguendo più intense nel maggio, particolarmente durante la terza decade; nei tre mesi dell'estate meteorologica gli scostamenti massimi delle temperature medie diurne dalle corrispondenti normali superarono 3 gradi. Al contrario la seconda metà del maggio del 1952 fu piuttosto fresca, anche durante la decade successiva ai cosiddetti *Santi di ghiaccio*; soltanto negli ultimi due giorni di tale mese le temperature si elevarono rapidamente e con maggior intensità sulle normali per tutta l'estate completa.

Nell'esame dei risultati delle osservazioni termometriche di Capodimonte si preferisce riferirsi alle sei medie pentadiche di ciascun mese estivo, anzichè, come di consueto, alle tre medie decadiche: ciò per avere un poco più esteso il diagramma degli scostamenti delle medie temperature diurne in esame rispetto alle medie normali; come anche per mettere in evidenza le deviazioni più accentuate.

La prova dell'estate caldissima del 1952 risulterà al completo da una triplice considerazione:

I) Dal paragone tra le temperature medie pentadiche, rilevate dalla I di giugno alla I di settembre, e le analoghe normali durante il periodo di 50 anni, tra il 1869 ed il 1918 (Tabella I), e dalla statistica dei giorni caldi rilevati nel 1952, paragonata con quella dello stesso periodo cinquantennale (Tabella I stessa). Si osserva che per la Stazione Meteorica di Capodimonte si ritengono caldi quei giorni in cui la media temperatura diurna e la massima diurna raggiungono rispettivamente  $25^{\circ}$  e  $30^{\circ}$ , od anche li superino; e caldissimi quegli altri in cui le medie diurne siano  $\geq 27^{\circ}$  e le massime  $\geq 32^{\circ}$ .

II) Dal rilievo delle temperature massime diurne  $\geq 30^{\circ}$ , con i giorni del mese in cui esse si sono verificate (Tabella II).

Nella Tabella I sono rilevate le medie pentadiche della temperatura per tutta l'estate del 1952, seguite dalle temperature normali di 50 anni (1869-1918) e dalle deviazioni  $\Delta$  di esse nel senso 1952-normali, le quali risultano tutte positive e con importi sino a  $6^{\circ},5$ , quest'ultima verificatasi molto recentemente nella metà di giugno. In tale mese si seguono, dal 13 al 22, temperature medie oscillanti tra  $24^{\circ}$  e  $28^{\circ},5$ , constatazione eccezionalissima per Napoli, giacchè tali temperature si verificano normalmente nei giorni caldi dell'estate avanzata; anche alte, tra  $22^{\circ}$  e  $26^{\circ}$  sono le temperature medie di tutti gli altri giorni di giugno. Altissime poi si manifestano in tal mese le temperature massime diurne, variabili tra  $25^{\circ}$  e circa  $34^{\circ}$ ; donde risulta che l'inizio dell'estate del 1952 è stato caldissimo.

Per tutta l'estate meteorologica, e precisamente dal principio di giugno fino alla prima pentade di settembre, per il 1952 la temperatura media diurna si è manifestata molto più alta della normale del cinquantennio,



TABELLA I

Temperature medie pentadiche. Numero giorni caldi, e scostamenti dai valori medi

Mese	Pentade	Temperature medie			Numero giorni caldi		
		1952	Normali (1869-1918)	$\Delta$ 1952-Normali	1952	Normali (1869-1918)	$\Delta$
VI	I	22° 8	20° 4	+ 2° 4	0	0.1	-0.1
	II	22 .1	20 .6	+ 1 .5	0	0.2	-0.2
	III	23 .6	20 .5	+ 3 .1	1	0.1	+0.9
	IV	27 .3	20 .8	+ 6 .5	5	0.1	+4.9
	V	24 .0	21 .6	+ 2 .4	0	0.2	-0.2
	VI	25 .1	22 .7	+ 2 .4	4	0.3	-3.7
VII	I	27 .0	23 .1	+ 3 .9	5	0.7	+4.3
	II	27 .7	23 .4	+ 4 .3	5	1.2	+3.8
	III	27 .1	23 .8	+ 3 .3	5	1.4	+3.6
	IV	27 .2	24 .3	+ 2 .9	5	1.8	+3.2
	V	25 .5	24 .5	+ 1 .0	3	2.1	+0.9
	VI	24 .6	24 .5	+ 0 .1	2	2.6	-0.6
VIII	I	25 .9	24 .5	+ 1 .4	5	1.8	+3.2
	II	26 .8	24 .1	+ 2 .7	5	1.5	+3.5
	III	27 .7	24 .1	+ 3 .6	5	1.6	+3.4
	IV	26 .1	24 .0	+ 2 .1	4	1.4	+2.6
	V	26 .3	23 .7	+ 2 .6	4	1.3	+2.7
	VI	25 .6	23 .2	+ 2 .4	4	1.2	+2.8
IX	I	24 .9	22 .8	+ 2 .1	2	0.7	+1.3

TABELLA II

Temperature massime ( $\geq 30^0$ )

Data	Valori	Data	Valori	Data	Valori
VI 13	30 <sup>0</sup> .2	VII 12	32 <sup>0</sup> .8	VIII 8	31.2
16	33 .4	13	32 .6	9	30.4
17	33 .7	14	32 .2	10	30.0
18	33 .7	15	32 .6	11	31.6
19	33 .4	16	32 .1	12	32.6
20	32 .1	17	31 .8	13	32.7
27	30 .0	18	30 .2	14	32.3
28	30 .0	19	31 .6	15	31.7
29	30 .1	20	33 .3	16	32.5
30	31 .6	21	32 .5	17	31.7
VII 1	32 .0	22	33 .0	20	30.2
2	32 .9	23	30 .3	21	31.7
3	31 .0	26	30 .0	22	31.5
4	31 .5	27	31 .0	23	33.5
5	33 .3	VIII 1	30 .2	24	30.4
6	35 .7	2	30 .0	28	30.8
7	32 .2	3	30 .0	29	30.8
8	31 .5	4	30 .3	30	31.8
9	30 .9	5	32 .1	31	31.0
10	30 .2	6	32 .9	IX 2	30.0
11	32 .0	7	31 .5		

culminando nel massimo valore di  $\Delta$  di 6°,5 nel giugno. Come risulta dalla tabella in esame, per il luglio e per l'agosto le temperature del 1952 si sono anche mantenute costantemente più elevate raggiungendo nella massima deviazione  $\Delta$  il valore di 4°,3 nella seconda decade di luglio: in tal modo è constatata la precocità ed il seguito di una estate eccezionalmente calda.

La tabella II mette in rilievo le temperature massime diurne  $\geq 30^\circ$ , le quali si sono manifestate fin dal 13 giugno, e proseguite con poche interruzioni fino al 2 settembre. Sopra 82 giorni tra questi due limiti, per 62 di essi si sono segnalate temperature  $\geq 30^\circ$ . Mettiamo separatamente in rilievo il numero dei giorni con temperature massime diurne da  $30^\circ$  a  $36^\circ$ , facendo procedere queste di  $2^\circ$  in  $2^\circ$ .

	VI	VII	VIII	IX	Totale
$30^\circ \div 32^\circ$	5	11	19	1	
$32^\circ \div 34^\circ$	5	13	7	—	
$34^\circ \div 36^\circ$	—	1	—	—	
Totale	<u>10</u>	<u>25</u>	<u>26</u>	<u>1</u>	62

La massima delle massime temperature si è verificata il 6 luglio con  $35^\circ,7$ : giorni consecutivi con temperature  $\geq 30^\circ$  sono stati notati nel giugno col numero di 5 (dal 16 al 20), nel luglio col numero di 23 (da 1 a 23), nell'agosto con 17 (da 1 a 17).

La Tabella I stessa mette in evidenza la statistica dei giorni caldi (e caldissimi). Da quanto risulta nella tabella si deduce che, durante il cinquantennio (1869-1918), nel giugno si è avuto un solo giorno caldo o caldissimo (somma dei valori normali medi annuali) contro nove giorni registrati nel giugno del 1952; nello stesso periodo sono stati notati 10 giorni nel luglio e 9 nell'agosto corrispondentemente a 16 ed a 18 nel 1952.

Del resto varie altre considerazioni facili possono farsi dal semplice esame dei dati numerici riportati dalle Tabelle.

## RICERCHE NEL CAMPO DEGLI INDICATORI AZOICI

*Nota dei dott. Rodolfo Nicolaus e Paolo Giordano Orsini, presentata dal socio F. Giordani*

(Adunanza del dì 6 giugno 1953)

**Sunto.** — Allo scopo di eseguire uno studio sistematico sulle relazioni che intercedono tra la struttura dei coloranti e le loro proprietà come indicatori acidimetrici, sono stati preparati numerosi mono- e dinitro- ossibenzolazo o-cresoli o-alchilsostituiti, ed alcuni composti analoghi derivati dal timolo e dal carvacrolo, la maggior parte dei quali vengono descritti per la prima volta con i loro metodi di preparazione.

Diciassette di tali composti sono stati esaminati con metodo spettrofotometrico per definirne le proprietà come indicatori e se ne è potuto dedurre che essi coprono utilmente un ampio intervallo della zona alcalina con punti di semiviraggio da  $\text{pH} = 8,2$  fino a  $\text{pH} = 11,4$ . Il cambiamento di colore, dal giallo all'azzurro od al violetto, e la variazione dei coefficienti di estinzione sono tali da permettere una notevole precisione nelle misure.

In un precedente lavoro <sup>1)</sup> è stato descritto un colorante azoico (I), ottenuto per azione della 2,4 dinitrofenilidrazina sull'1 metil-3 isoamil-2,5 benzochinone, le cui soluzioni acquose od alcooliche passano nettamente e reversibilmente dal giallo all'azzurro per alcalinizzazione <sup>2)</sup>.

Poichè tale sostanza, ad un primo sommario esame, mostrava di possedere interessanti qualità come indicatore con intervallo di viraggio nella zona alcalina e poichè si presentava la possibilità di preparare numerosi composti omologhi ed analoghi con la prospettiva di estendere il campo di utilizzazione sempre nella zona alcalina, che è piuttosto povera di indicatori, siamo stati indotti ad eseguire uno studio sistematico, di cui diamo qui una prima relazione, in attesa di farne seguire delle altre, con maggiori dettagli sul comportamento dei singoli composti.

L'intervallo di viraggio di un indicatore si localizza facilmente per mezzo del valore  $\text{pK}_u$  e cioè per mezzo del logaritmo decimale del valore

---

<sup>1)</sup> PANIZZI L., NICOLAUS R. A. e QUILICO A. — *Sintesi della tetraidrodesossiflavoglauцина*: Gazz. Chim. Ital. **80**, 610-625; 1950.

<sup>2)</sup> In soluzione idroalcoolica molto diluita dal giallo chiaro al viola.



reciproco della costante di viraggio  $K_u$ , definita da THIEL <sup>1)</sup> per mezzo della relazione:

$$(1) \quad K_u = \frac{[I^-]}{[HI]} a_{H^+} = \frac{\alpha}{1-\alpha} a_{H^+}$$

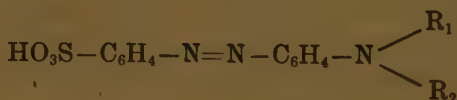
dove  $a_{H^+}$  indica l'attività degli ioni idrogeno,  $\alpha$  il grado di dissociazione dell'indicatore  $HI \rightleftharpoons H^+ + I^-$  e dove, al solito, i simboli chimici scritti tra parentesi quadre stanno ad indicare le concentrazioni molecolari.

L'estensione utilizzabile dell'intervallo di viraggio e la nettezza del viraggio dipendono poi da numerosi altri fattori, come la distribuzione dell'energia luminosa nello spettro della luce incidente, la posizione della o delle bande di assorbimento delle specie colorate (molecole o ioni), la sensibilità relativa dell'occhio per le diverse radiazioni luminose, nonchè dall'ammontare della differenza  $\Delta\epsilon = \epsilon_{I^-} - \epsilon_{HI}$  tra i due coefficienti molecolari di estinzione  $\epsilon_{I^-}$  ed  $\epsilon_{HI}$  della forma dissociata e di quella indissociata rispettivamente.

Malgrado le numerose ricerche compiute in argomento, restano ancora mal definiti i criteri per attribuire una cifra di qualità ai vari indicatori e, nello stesso tempo, sono scarse le indagini sistematiche su serie di composti omologhi ed analoghi, che siano state condotte in vista di ottenere prodotti meglio adatti allo scopo.

Le conoscenze che si hanno circa l'influenza, che i gruppi sostituenti nella molecola esercitano sulla forza degli acidi <sup>2)</sup>, possono servire a dare utili direttive circa la possibilità di influire sul punto di mezzo-viraggio e cioè sul valore del  $pK_u$ ; ma più difficile risulta il prevedere, sia pure da un semplice punto di vista qualitativo, l'influenza delle sostituzioni sugli altri fattori che interessano il modo di comportarsi dell'indicatore.

Il primo studio sistematico risale a SÖRENSEN <sup>3)</sup> e riguarda precisamente gli azo-indicatori. L'A. ha preso in esame i composti del tipo:



<sup>1)</sup> THIEL A. und COCH G. — *Beiträge zur systematischen Indikatorenkunde* 23 Mitteilung. Ueber den Salzfehler einiger Indikatoren: Z. f. anorg. u. allg. Ch., 117, 353-75; 1934.

<sup>2)</sup> Veggasi: BRANCH G. E. K. and CALVIN M. — *The theory of organic chemistry. Cap. VI. Equilibrium — Acid Strength* (Prentice - Hall Inc., New-York 1949).

<sup>3)</sup> SÖRENSEN S. P. L. — *Enzymstudien. II. Ueber die Messung und die Bedeutung der Wasserstoffionenkonzentration bei enzymatischen Prozessen*: Biochem. Zeit., 21, 131-304; 1909.

ed ha studiato l'influenza dei sostituenti ( $-H$ ,  $-CH_3$ ,  $-C_2H_5$ ,  $-C_6H_5$ ) nel gruppo amminico, dimostrando che, con i radicali alchilici, a misura che si sale nella serie omologa, si ha un graduale spostamento del  $pK$  verso la zona alcalina; mentre la sostituzione di un radicale arilico agisce in senso inverso. Egli è giunto così a coprire utilmente l'intervallo da  $pH=1,9$  a  $pH=4,4$ , estendendolo poi ulteriormente fino a  $pH=5,7$  con l'uso dell'acido  $\alpha$ -naftilamminoparaazobenzenzolfonico, con  $R_1=R_2=CH_3$ .

Gli studi — che THIEL ha successivamente eseguito sugli azoindicatori prendendo come rappresentante l' $\alpha$ -naftilamminoazobenzolo e studiando gli acidi p.  $-SO_3H$  e o.  $-CO_2H$ , ottenuti per sostituzione nel gruppo benzenico, ed anche i corrispondenti dimetil- e fenilderivati nel gruppo amminico — confermano l'influenza che la sostituzione dei gruppi alchilici esercita spostando l'intervallo di viraggio nella zona alcalina, indicano poi che è invece trascurabile l'influenza del fenile, e mettono infine in evidenza sensibili variazioni concomitanti dei coefficienti di estinzione. La scarsa solubilità dei prodotti non ha tuttavia permesso agli autori di definire il comportamento di questi indicatori nelle soluzioni acquose <sup>1)</sup>. Maggiori notizie si ricavano dagli studi sulla influenza dei sostituenti negli anelli benzenici della fenoltaleina, eseguiti da THIEL e JUNGFER <sup>2)</sup> e dai quali risulta che la sostituzione di atomi di cloro abbassa il punto di semiviraggio ed abbassa anche il più delle volte il coefficiente di estinzione corrispondente al massimo di assorbimento; mentre l'introduzione di radicali alchilici non altera il punto di semiviraggio, ma influisce in modo vario sul coefficiente di estinzione. Tutto ciò sempre limitato al primo viraggio, che è quello comunemente utilizzato nell'analisi volumetrica. Diverso modo di comportarsi si rileva invece nei riguardi del secondo viraggio, che la fenoltaleina ed i suoi derivati presentano nella zona di più elevata alcalinità, dove si verifica una decolorazione dovuta ad una reazione non istantanea ed in parte non reversibile <sup>3)</sup>.

Nel gruppo delle ftaleine alchilsostituite negli anelli laterali, farebbe eccezione la m.xilenoltaleina vicinale, che darebbe secondo GLÖCKNER.

<sup>1)</sup> THIEL A. und WÜLFKEN — *Beiträge zur systematischen Indikatorenkunde*. 9 Mitteilung. Ueber Azoindikatoren mit unsymmetrisch gebautem Kern: Z. f. anorg. u. allg. Ch.: 136, 393-405; 1924.

<sup>2)</sup> THIEL A. und JUNGFER L. — *Beiträge zur systematischen Indikatorenkunde*. 15. Mitteilung. Ueber Phenolphthalein und einiger seiner Homologen: Z. f. anorg. u. allg. Ch.: 178, 49-72; 1929.

<sup>3)</sup> Vedi il lavoro citato in <sup>2)</sup> ed inoltre; LUND H. *The constitution of phenolphthalein. Part II. The fading of phenolphthalein in alkaline solutions*: J. Chem. Soc., 1844-52; 1930.

THIEL A. und COCH G. *Beiträge zur systematischen Indikatorenkunde*. 20 Mitteilung. Ein irreversibler Abblasseffekt beim Phenolphthalein: Z. f. anorg. u. allg. Ch., 217, 254-6; 1934.

$pK=9,15$  circa <sup>1)</sup> e cioè uno spostamento anche per il primo viraggio; ma è necessario osservare che i metodi adoperati da questo A. non sono tali da permettere una valutazione precisa. Risulterebbe invece che nè la p.xilenoltaleina ( $pK=9,65$ ) e nemmeno la timoltaleina ( $pK=9,70$ ) danno sensibili spostamenti per l'ordinario punto di semiviraggio <sup>2)</sup>. Il che invece si verifica in modo sensibile passando all' $\alpha$ -naftoltaleina ( $pK=8,4$ ).

SLOTTA e FRANKE <sup>3)</sup> hanno studiato l'influenza dell'alchilazione del gruppo amminico nell'arancio  $\alpha$ -naftolo ed hanno trovato che, passando dal metile all'esile, non si ha praticamente variazione del  $pK$ , ma si nota un graduale aumento dei coefficienti di estinzione, valutati da loro solo in modo qualitativo, e senza misure quantitative. Nessuna traccia si è trovata nella letteratura delle ricerche spettrofotometriche, annunziate nella nota citata.

Gli stessi AA. hanno invece esteso in seguito le loro ricerche alla serie dell'eliantina ed a quella del rosso di metile, trovando nel primo caso variazioni irregolari del  $pK$  (e cioè  $-CH_3$  3,76;  $-C_2H_5$  4,34;  $-C_3H_7$  3,95;  $-C_4H_9$  4,01;  $-C_6H_{13}$  3,71); mentre nel secondo caso hanno constatato un regolare aumento soltanto fino al propilderivato ( $-CH_3$  5,06;  $-C_2H_5$  5,42;  $-C_3H_7$  5,48) giacchè gli ultimi due termini della serie, che erano stati preparati, non si prestavano alle misure per la loro insolubilità <sup>4)</sup>.

Anche SACCONI ha trovato che — passando dall' $[\alpha$ -aminobenzale] -4 nitrofenilidrazina all' $[\alpha$ -aminobenzale] -4 nitro-2 metilfenilidrazina — il primo viraggio passa da  $pK'=6,79$  a  $pK'=7,01$ ; mentre il secondo resta immutato con  $pK''=10,40$  <sup>5)</sup>.

Infine di recente GLÖCKNER si è riproposto il problema di studiare in modo sistematico l'influenza dei sostituenti sulle proprietà degli indicatori <sup>6)</sup> ed ha, a tale fine, preso in esame nove diversi derivati del 4 ossiazobenzolo e precisamente: il 4' nitro-, il 4',6' dinitro-, il 2',4',6' trinitro-, il 4' nitro- 3metil-, il 4',6' dinitro- 3metil-, il 2',4',6' trinitro- 3metil-,

---

<sup>1)</sup> GLÖCKNER B. — *Die Indikatoreigenschaften des vicinalen m-xylenolphthalein*: Monat. f. Chemie, 80, 489-92; 1949.

<sup>2)</sup> THIEL A. *Praktische Neuerungen auf dem Gebiete der Indikatorenkunde*: Z. f. angew. Ch., 44, 863-4; 1931.

<sup>3)</sup> SLOTTA K. H. und FRANKE W. — *Zur Konstitution der Azoindikatoren. I mitteilung.  $\alpha$ -Naphthol orange*: Ber. d. d. chem. Ges., 64, 86-94; 1931.

<sup>4)</sup> Id. Id.—Id. II. *Mitteilung. Die höheren Homologen des Helianthins und des Methylrots*: Ibid., 66, 104-112; 1933.

<sup>5)</sup> SACCONI L. *Colorimetria indiretta. Nota III. Le costanti colorimetriche della  $[\alpha$ -aminobenzal] 4.nitrofenilidrazina e del suo 2.metilderivato*: Gazz. Chim. It., 78, 674-80; 1948.

<sup>6)</sup> GLÖCKNER B. — *Konstitution und Indikatoreigenschaften. (1. Mitteilung)*: Monat. f. Chemie, 80, 493-8; 1949.

il 4' nitro- 3,5 dimetil-, il 4',6' dinitro- 3,5 dimetil- ed il 2',4',6' trinitro- 3,5 dimetil-.

Malgrado i propositi di ulteriori sviluppi, l'iniziativa, per quanto ci risulta, non ha avuto seguito e, d'altra parte, le indagini eseguite sono state condotte con un ordinario colorimetro in modo sommario così da non consentire la esatta determinazione delle grandezze caratteristiche ed una esauriente discussione dei risultati.

Dalle curve colorimetriche abbiamo tentato di dedurre valori approssimati del  $pK_u$  che riportiamo nello specchio che segue:

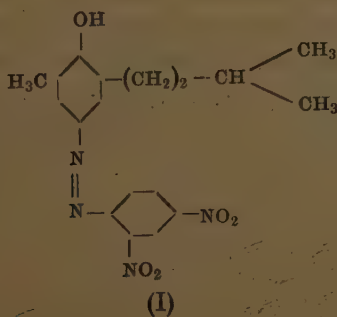
	4' nitro-	4',6' dinitro-	2',4',6' trinitro-
	7,9	7,2	6,5
3 metil	7,9	7,6	6,3
3,5 dimetil	7,9	8,5	6,1

Si rileva da esso che l'introduzione dei gruppi  $NO_2$  provoca sempre uno spostamento del punto di semiviraggio verso la zona acida, meno che nel caso del 4',6' dinitro- 3,5 dimetil- 4ossiazobenzolo, il quale fa eccezione alla regola, giacchè l'introduzione del secondo gruppo nitrico determina un aumento nel valore del  $pK_u$ . Vario è poi il modo di comportarsi rispetto alle successive introduzioni dei gruppi metilici, a cui il mononitro composto sembrerebbe insensibile; mentre i dinitroderivati—per i quali si osserva uno spostamento verso la zona alcalina—reagirebbero in senso opposto a quello dei trinitroderivati, per i quali si osservano spostamenti, sia pure di minore entità, verso la zona acida, a misura che cresce il numero dei radicali metilici.

Dalle curve colorimetriche risulta anche che tutte le sostituzioni provocano aumenti della intensità dell'assorbimento.

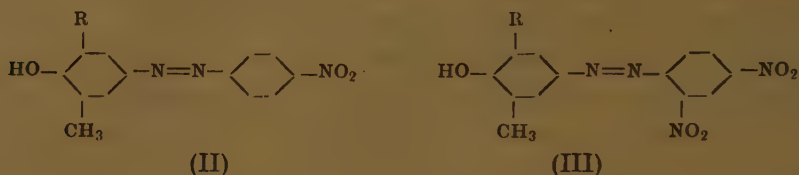
Ci è sembrato quindi che fosse utile di eseguire una ricerca sistematica per studiare l'influenza dell'introduzione di gruppi nitrici e di gruppi alchilici diversi nelle molecole di indicatori azoici.

Il composto (I), di cui abbiamo fatto cenno al principio di questa nota, rientra nella serie studiata da GLÖCKNER, essendo precisamente il 2',4' dinitro- 3 metil- 4 ossi- 5 isoamilazobenzolo:

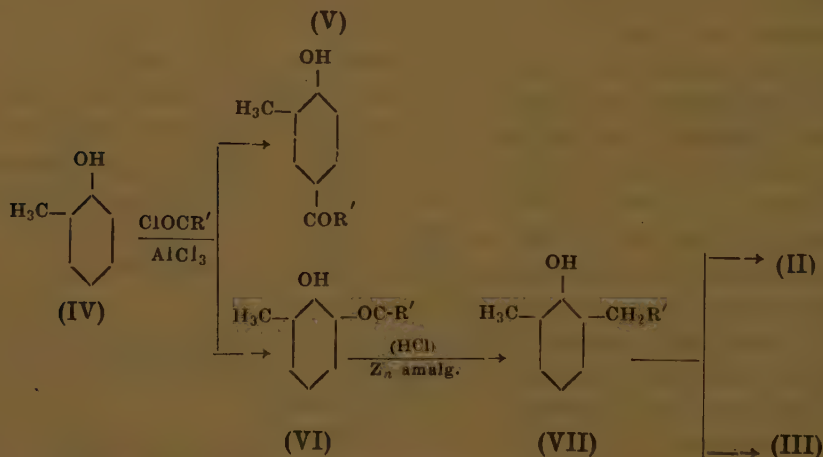




Con lo stesso metodo generale di preparazione abbiamo ottenuto due serie di nitrossiazocomposti (II) e (III) nelle quali, conservando la struttura fondamentale di mono- e dinitrobenzolo orto cresoli, o alchilsostituiti, si sono apportate sistematiche variazioni nella natura del radicale alchilico R.



Tali coloranti sono stati ottenuti, secondo lo schema sotto indicato, a partire dall' o.cresolo (IV) per azione dei cloruri acidi corrispondenti, in presenza di 1÷2 molecole di cloruro di alluminio anidro ed in assenza di solventi, giacchè in queste condizioni il metodo risulta meno laborioso e più generalizzabile <sup>1)</sup>.



Per la risoluzione della miscela di p.ossi (V) e o.ossichetoni (VI) così ottenuta, si fece ricorso alla maggiore volatilità della forma orto oppure alla sua minore solubilità in alcali, rispetto alla forma para.

La trasformazione di (VI) nell' alchilcresolo (VII) venne eseguita per riduzione secondo CLEMMENSEN ottenendosi così una serie di o.alchilcresoli generalmente liquidi a temperatura ambiente, di odore gradevole, quasi incolori e che non danno per lo più alcuna reazione al cloruro ferrico. Poichè i corrispondenti chetoni forniscono invece sempre intense colora-

<sup>1)</sup> Loc. cit. in <sup>1)</sup>, pag. 1.

zioni con tale reattivo, si può sfruttare questa differenza di comportamento per valutare la fine della CLEMMENSEN.

Per ottenere poi i composti delle serie II e III si copularono gli alchieresoli rispettivamente con il diazo di p.nitroanilina e di 2,4 dinitroanilina, in ambiente alcalino (o di acetato sodico) e generalmente in presenza di alcool.

L'elenco dei prodotti preparati con alcune delle loro proprietà figura nella seguente tabella I, nella quale sono compresi pure i nitrobenzolazo, derivati dal timolo e dal carvacrolo, che ci è parso conveniente preparare e studiare, anche per la loro facile accessibilità.

Alcuni dei coloranti si presentano sotto due forme cristalline, di colore e di punto di fusione diverso, talvolta trasformabili l'una nell'altra <sup>1)</sup>.

Con l'aumentare di R diminuisce la solubilità in acqua <sup>2)</sup>, il che provoca soluzioni torbide, che non permettono l'esecuzione delle misure colorimetriche occorrenti ai nostri scopi.

La determinazione del pK per i vari indicatori è stata fatta col metodo spettrofotometrico. Per i rappresentanti tipici della serie esaminata è stato eseguito lo studio completo delle isobatte, verificando il loro passaggio per un punto isobiestico <sup>3)</sup> al fine di accertare che fosse legittima la applicazione della legge di additività, nel calcolo del grado di dissociazione a partire dai coefficienti molecolari di estinzione.

---

<sup>1)</sup> Il prodotto XV, ad esempio, cristallizzato da ligroina si presenta come una polvere microcristallina di color rosso arancione con p. f. 158°-9°; mentre per cristallizzazione dall'alcole etilico si presenta di colore violetto cupo ed ha p. f. 163°-4°. Per le caratteristiche del prodotto XXIII si veggia loc. cit. in <sup>1)</sup> pag. 1.

<sup>2)</sup> L'introduzione di gruppi OH in R potrebbe eliminare questo inconveniente; ma la preparazione di tali composti non è, come bene si può intendere, scevra da difficoltà.

<sup>3)</sup> Vedasi: CLARK W. M. — *The determination of hydrogen ions*. III ed. (The William and Wilkins Co - Baltimore: 1928) pp. 152-3.

TABELLA I

Serie	R	Nº d'ordine dell' indicatore	Colore del com- posto cristallino	P. F.
II	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub>	VIII	rosso	149° — 150°
	C <sub>3</sub> H <sub>7</sub> n	IX	rosso cupo	147° — 148°
	C <sub>4</sub> H <sub>9</sub> n	X	rosso aran- cione	136° — 137°
	C <sub>6</sub> H <sub>13</sub> n	XI	rosso	130° — 131°
	C <sub>7</sub> H <sub>15</sub> n	XII	rosso	124° — 125°
	C <sub>4</sub> H <sub>9</sub> iso	XIII	rosso	143° — 144°
	C <sub>5</sub> H <sub>11</sub> iso	XIV	rosso aran- cione	129° — 130°
III	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub>	XV	violetto cupo	163° — 164°
	C <sub>3</sub> H <sub>7</sub> n	XVI	rosso	115° — 116°
	C <sub>4</sub> H <sub>9</sub> n	XVII	rosso cupo	119° — 120°
	C <sub>6</sub> H <sub>13</sub> n	XVIII	rosso	119° — 120°
	C <sub>7</sub> H <sub>15</sub> n	XIX	rosso	104° — 105°
	C <sub>12</sub> H <sub>25</sub> n	XX	rosso aran- cione	120° — 122°
	C <sub>4</sub> H <sub>9</sub> iso	XXI	rosso	152° — 153°
	C <sub>5</sub> H <sub>11</sub> iso	XXII	rosso aran- cione	107° — 108°
<i>Timolo :</i>				
mononitrobenzolazo		XXIII	rosso viola	163° — 164°
dinitrobenzolazo		XXIV	rosso viola	172° — 173°
<i>Carvacrolo :</i>				
mononitrobenzolazo		XXV	rosso	135° — 136°
dinitrobenzolazo		XXVI	rosso viola cupo	200° — 201°

# METODI DI PREPARAZIONE

## A) Preparazione degli alchilcresoli.

Diamo in dettaglio, una volta per tutte, il metodo di preparazione per l'*o*.etilcresolo, limitandoci a segnalare, negli altri casi, i dati caratteristici.

*O*.acetilcresolo. In un pallone da 50 cc, munito di refrigerante a ricadere e chiuso superiormente da un tubo a  $\text{CaCl}_2$ , si pongono g 35 di *o*.cresolo distillato di fresco e g 37,7 di cloruro di acetile. Si riscalda la miscela a  $100^\circ \text{C}$  e si mantiene a questa temperatura fino a quando non cessi lo sviluppo di  $\text{HCl}$ ; s'introducono allora velocemente e a piccole porzioni g 80 di cloruro di alluminio anidro.

Riscaldando con un bagno ad olio si porta la temperatura a  $120^\circ \text{C}$  mantenendovela per 1 ora; si termina la reazione portando la massa reagente a  $180^\circ$  per 15'. Dopo raffreddamento la massa rossobruna friabile viene decomposta con 150 cc di  $\text{HCl}$  conc. e ghiaccio: l'olio denso, bruno che si separa viene distillato in corrente di vapore, protraendo la distillazione fino a quando il liquido che distilla risulta limpido. Il distillato si estrae tre volte con etere seccando le soluzioni eterree brevemente su  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  anidro, si elimina l'etere per distillazione a bagno-maria e si tratta l'olio residuo con  $\text{NaOH}$  al 20%; si filtra alla pompa il sale sodico dell'*o*.acetilcresolo, si mette in libertà il fenolo con  $\text{HCl}$  conc. e si estrae con etere lavandolo più volte con acqua. Si secca l'etere su  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  anidro per 1 notte, si evapora e si distilla l'olio così ottenuto frazionatamente sotto vuoto. Si ottengono g 15÷16 di un olio a grato odore fenolico che bolle a  $110^\circ$ — $1^\circ$  sotto 12—13 mm. ROSEMUND e SCHNURR, per lo stesso composto, danno un p.e.  $103^\circ$ — $4^\circ \text{C}$  a 9 mm <sup>1)</sup>.

Con cloruro ferrico in soluzione alcolica si ha intensa colorazione violetta.

*O*.etilcresolo (VII;  $\text{R}' = -\text{CH}_3$ ). Si prepara l'amalgama di zinco trattando 75 g di polvere di zinco con 75 cc di  $\text{HgCl}_2$  5% e 5 cc di  $\text{HCl}$  conc., agitando per 5÷6 minuti mentre si raffredda sotto acqua corrente e lavando quindi l'amalgama prima con acqua e poi con alcool. Si tengono a ricadere per 3 ore 15 g di *o*.acetilcresolo, 75 g di amalgama e 150 cc di alcool aggiungendo 65 cc di  $\text{HCl}$  conc. a piccole porzioni. A riduzione avvenuta si filtra l'amalgama alla pompa lavandola con poco alcool: il filtrato si distilla a b. m. eliminando la massima parte dell'alcool, il residuo si diluisce con acqua e si estrae con etere. La soluzione eterrea viene seccata su  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  anidro e poi evaporata. L'olio residuo viene distillato frazionatamente sotto vuoto: passa un liquido incolore a p. e.  $91^\circ \text{C}$  sotto

<sup>1)</sup> ROSEMUND K. W. und SCHNURR W. — *Ueber Acylwanderungen in Phenolen*: Ann. 460, 56-98; 1927.



12-13 mm, solubile in NaOH 2 N. Con  $\text{FeCl}_3$  in ambiente alcoolico nessuna colorazione. AUWERS <sup>1)</sup> dà p. e.  $91^{\circ}\text{-}2^{\circ}\text{C}$  sotto 12 mm.

*O. propionileresolo* (VI:  $\text{R}' = -\text{CH}_2-\text{CH}_3$ ). La trasposizione si effettua scaldando a  $120^{\circ}\text{C}$  per 3 ore. Dopo distillazione in corrente di vapore e successiva distillazione frazionata sotto vuoto, si ottiene un olio quasi incolore con p. e.  $124^{\circ}$  a  $12\div 13$  mm. AUWERS (loc. cit.) trova p. e.  $127^{\circ}\text{-}9^{\circ}$  sotto 15 mm.

*O. propileresolo* (VII:  $\text{R}' = -\text{CH}_2-\text{CH}_3$ ). Olio incolore a p. e.  $108^{\circ}\text{-}9^{\circ}$  sotto  $12\div 13$  mm. Solubile in NaOH 2 N e poco solubile in NaOH al 30%; con  $\text{FeCl}_3$  in soluzione alcoolica dà una colorazione giallo-bruna.

*O. butirrileresolo* (VI:  $\text{R}' = -\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_3$ ). Temperatura di trasposizione  $160^{\circ}\text{-}180^{\circ}\text{C}$  per 2 ore. Dopo purificazione si ottiene un olio appena colorato in giallo a p. e.  $130^{\circ}\text{-}5^{\circ}\text{C}$  sotto  $12\div 13$  mm; poco solubile in NaOH 2N, con NaOH al 30% dà un sale sodico bianco e con  $\text{FeCl}_3$  in soluzione alcolica una colorazione viola. Per azione della 2,4 dinitrofenilidrazina solforica fornisce un o.p.dinitrofenilidrazone che, cristallizzato da alcool, si presenta in aghetti arancione a p.f.  $142^{\circ}\text{-}3^{\circ}\text{C}$ .

*O. butileresolo* (VII:  $\text{R}' = -\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_3$ ). Olio quasi incolore a p.e.  $115^{\circ}\text{-}9^{\circ}\text{C}$  e sotto  $14\div 15$  mm. Solubile in NaOH 2N, la soluzione alcoolica non si colora con cloruro ferrico.

*O. isobutirrileresolo* (VII:  $\text{R}' = -\text{CH} \begin{smallmatrix} \text{CH}_3 \\ \diagup \\ \diagdown \\ \text{CH}_3 \end{smallmatrix}$ ). La trasposizione si realizza a  $160^{\circ}\text{-}180^{\circ}$  per 2 ore. Dopo purificazione si ottiene un olio gialletto a p.e.  $120^{\circ}\text{-}140^{\circ}$  sotto  $12\div 13$  mm. Trattato con  $\text{FeCl}_3$  in ambiente alcolico dà intensa colorazione viola, con NaOH al 30% dà un sale sodico poco solubile in acqua.

*O. isobutileresolo* (VII:  $\text{R}' = -\text{CH} \begin{smallmatrix} \text{CH}_3 \\ \diagup \\ \diagdown \\ \text{CH}_3 \end{smallmatrix}$ ). Olio incolore a p.e.  $110^{\circ}\text{-}5^{\circ}$  sotto 13 mm. Per lungo riposo il liquido solidifica cristallizzando in foglioline dall'aspetto grasso a p.f.  $36^{\circ}\text{-}8^{\circ}$ . Con  $\text{FeCl}_3$  in ambiente alcolico non dà alcuna colorazione.

All' analisi

	Trovato	C %	80,80	H %	9,90
Per $\text{C}_{11}\text{H}_{16}\text{O}$	Calcolato	C %	80,40	H %	9,75

*O. esoleresolo* (VI:  $\text{R}' = -\text{CH}_2-(\text{CH}_2)_3-\text{CH}_3$ ). Trasposizione alla temperatura di  $160^{\circ}\text{-}180^{\circ}$  per 2 ore. In questo e nel caso successivo la riso-

<sup>1)</sup> v. AUWERS K. und WITTIG G. — Ueber Diphenochinone: Ber. d. d. chem. Ges., 57, 1270-80; 1924.

luzione della miscela di isomeri è stata fatta per trattamento con NaOH 2 N della soluzione eterea dei due isomeri, sfruttando la maggiore solubilità dell' isomero para nella soluzione alcalina.

Per evaporazione della soluzione eterea si ottiene un olio giallognolo con p. e.  $150^{\circ}\text{--}4^{\circ}$  a  $15\div 6$  mm. COULTHARD e collaboratori <sup>1)</sup> danno  $152^{\circ}\text{--}4^{\circ}\text{C}$  sotto 15 mm. Poco solubile in NaOH 2 N, con NaOH al 30% precipita il sale sodico. Con  $\text{FeCl}_3$  in ambiente alcolico si ha una debole colorazione grigio verde. Per azione della dinitrofenilidrazina solforica si ottiene un o. p. dinitrofenilidrazone che cristallizzato da alcool si presenta in aghetti tozzi arancioni a p. f.  $178^{\circ}\text{--}9^{\circ}\text{C}$ .

*O.esilcresolo* (VII:  $\text{R}' = -\text{CH}_2-(\text{CH}_2)_3-\text{CH}_3$ ). Olio incolore a p. e.  $140^{\circ}\text{--}3^{\circ}$  sotto  $14\div 15$  mm; mentre COULTHARD e collaboratori (loc. cit.) trovano  $139^{\circ}\text{--}41^{\circ}$  sotto la stessa pressione.

Con cloruro ferrico in soluzione alcoolica non si ha alcuna colorazione.

*O.eptoilcresolo* (VI:  $\text{R}' = -(\text{CH}_2)_5-\text{CH}_3$ ). Olio giallognolo a p. e.  $161^{\circ}\text{--}2^{\circ}$  sotto  $14\div 15$  mm. Poco solubile in NaOH 2N, trattato con una soluzione di NaOH al 30% precipita il sale sodico. In soluzione alcolica dà colorazione grigio verde per aggiunta di  $\text{FeCl}_3$ . Per trattamento con soluzione alcolica di o.p.dinitrofenilidrazina, addizionata di poco  $\text{H}_2\text{SO}_4$  conc., fornisce il corrispondente o.p.dinitrofenilidrazone che cristallizzato da alcool forma aghetti aranciati a p. f.  $151^{\circ}\text{--}2^{\circ}\text{C}$ .

*O.eptilcresolo* (VII:  $\text{R}' = -(\text{CH}_2)_5-\text{CH}_3$ ). Olio incolore a p. e.  $147^{\circ}\text{--}8^{\circ}$  sotto  $23\div 24$  mm. Con  $\text{FeCl}_3$ , in ambiente alcolico nessuna colorazione.

*Laurato di o.cresile*: g 32,7 di cloruro di laurile e g 16,2 di o.cresolo di fresco distillato si riscaldano per 1 ora a  $100^{\circ}$  fuori del contatto dell' umidità. Il prodotto grezzo si fraziona sotto vuoto. Si ottengono g  $39\div 40$  di un olio denso incolore che bolle a  $204^{\circ}\text{--}7^{\circ}$  sotto una pressione di  $5\div 6$  mm. All' analisi:

	Trovato	C % 78,66	H % 10,72
Per $\text{C}_{19}\text{H}_{30}\text{O}_2$	Calcolato	C % 78,62	H % 10,35

*O.lauoilcresolo*: (VI:  $\text{R}' = -(\text{CH}_2)_{10}-\text{CH}_3$ ). Si opera la trasposizione riscaldando per 7 ore a  $160^{\circ}$  una miscela di 40 g di laurato di o.cresile e g 36,7 di  $\text{AlCl}_3$  anidro. Dopo raffreddamento e decomposizione con HCl e ghiaccio si estrae con etere dibattendo la soluzione eterea 3-4 volte con NaOH 2N: la detta soluzione, seccata su  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  anidro ed evaporata, lascia come residuo un olio bruno denso che si fraziona sotto vuoto. Si ottengono 3 frazioni, una prima che passa fra  $80^{\circ}$  e  $156^{\circ}$ , sotto  $2\div 3$  mm, una

<sup>1)</sup> COULTHARD C. E., MARSHALL J., and PYMAN F. L. — *The variation of phenol coefficients in homologous series of phenols*: J. Ch. Soc., 280-91; 1930.

seconda passante fra 156° e 195°, ed una terza che passa oltre 195° con leggera decomposizione.

La frazione passante fra 156° e 195° si presenta come olio denso giallo-verdino poco solubile negli alcali diluiti e concentrati, trattata con FeCl<sub>3</sub> in soluzione alcolica, fornisce una colorazione bruna. Per azione della 2,4 dinitrofenilidrazina si ottiene un dinitrofenilidrazone che cristallizzato da alcool si presenta in aghetti arancione a p. f. 128°-9°.

*O.laurilcresolo* (VII: R' = —(CH<sub>2</sub>)<sub>10</sub>—CH<sub>3</sub>). Si ottiene per riduzione secondo Clemmensen della corrispondente frazione chetonica. La riduzione si protrae per 7 ore a b. m. Olio denso quasi incolore a p. e. 125°-140° sotto 3 mm. Con FeCl<sub>3</sub> in soluzione alcolica non dà nessuna colorazione. All'analisi.

	Trovato	C %	82,5	H %	11,6
Per C <sub>19</sub> H <sub>32</sub> O	Calcolato	C %	82,6	H %	11,5

#### B. Preparazione dei coloranti.

La mononitroanilina è stata sempre diazotata in ambiente cloridico con NaNO<sub>2</sub>, mentre nel caso della dinitroanilina è risultato più conveniente di operare con HNO<sub>3</sub> in presenza di solfito sodico <sup>1)</sup>.

Per la copulazione si è dovuto tener conto del fatto che, al crescere della lunghezza della catena laterale diminuisce la solubilità degli alchilcresoli, in ambiente alcalino, di talchè si è ricorso, quando ciò è apparso necessario, alla copulazione in ambiente alcolico ed in presenza di acetato sodico, invece che di idrossido.

Descriviamo in dettaglio, una volta per tutte, la preparazione dei due etilderivati.

1) *4'ntro- 3metil- 4ossi- 5etil- azobenzolo (p.nitrobenzolazo o.etilcresolo)*. VIII. In una soluzione cloridrica, ottenuta diluendo 1,7 cc di acido cloridico concentrato con un egual volume di acqua, si sciolgono a caldo g 0,34 di p.nitroanilina, si aggiungono g 1,3 di ghiaccio finemente triturato e in una sola volta g 0,18 di NaNO<sub>2</sub> agitando energicamente. Dopo 15' di riposo si versa la soluzione del sale di diazonio a poco per volta in una soluzione fredda (0°-5°) di 0,25 g di etilcresolo in 15 cc di NaOH 2 N. Il liquido coloratosi intensamente in violetto viene acidificato con HCl conc. cautamente e dopo 10' si filtra il colorante precipitato alla pompa, si lava a lungo con acido cloridrico dil. freddo indi con acqua si secca sotto vuoto a b. m. Cristallizzato da ligroina 105°-10° e da alcool si presenta

<sup>1)</sup> Loc. cit. in 1), pag. 1.

sotto forma di aghetti rossi a p. f. 149°-50°. All'analisi :

	N % trovato	15,02
Per $C_{15} H_{15} O_3 N_3$	N % calcolato	14,73

2) 2',4'-nitro- 3metil- 4ossi- 5etil-azobenzolo (o.p.dinitrobenzolazo o. etilcresolo). XV. Una miscela di g 0,25 di 2,4 dinitroanilina e g 0,30 di solfito sodico anidro finemente polverizzata viene aggiunta a piccole porzioni a 1,5 cc di  $HNO_3$  conc. raffreddato in bagno a ghiaccio e si versa la soluzione del sale di diazonio a poco alla volta in una soluzione fredda di 0,12 g di o.etilcresolo in 20 cc di NaOH 2 N sotto agitazione. Il liquido intensamente colorato si acidifica cautamente con HCl conc. freddo e dopo qualche minuto si filtra alla pompa il colorante precipitato lavando a lungo con HCl dil. freddo a poi con acqua: si secca quindi sotto vuoto a bagnomaria. Cristallizzato da ligroina 105°-15° si presenta come polvere rosso-arancione microcristallina a p. f. 158°-9°; ricristallizzato da alcool si presenta in aggregati microcristallini di colore violetto cupo a p. f. 163°-4°. All'analisi :

	N % trovato	16,74
Per $C_{15} H_{14} O_5 N_4$	N % calcolato	16,97

3) 4'-nitro- 3metil- 4ossi- 5propilazobenzolo (p.nitrobenzolazo o. propilcresolo). IX. Cristallizzato da ligroina 110°-20° C e da alcool si presenta in aghi tozzi rosso cupo a p. f. 147°-8°. All'analisi :

	N % trovato	14,09
Per $C_{16} H_{17} O_3 N_3$	N % calcolato	14,04

4) 2',4'-dinitro- 3metil- 4ossi- 5propilazobenzolo (o.p.dinitrobenzolazo o. propilcresolo). XVI. Cristallizzato da ligroina 110°-20° C e da alcool a 95° si presenta come polvere cristallina con p. f. 115°-6° C. All'analisi :

	N % trovato	16,39
Per $C_{16} H_{16} O_5 N_4$	N % calcolato	16,27

5) 4'-nitro- 2metil- 4ossi- 5isopropilazobenzolo (p.nitrobenzolazo timolo). XXIII. Si parte da timolo puro della ditta Merck di Damstadt. Il colorante cristallizzato 3 volte da  $CH_3COOH$  glaciale, si presenta come polvere microcristallina rosso-viola con p. f. 163°-4° che non sale ulteriormente anche dopo ripetute cristallizzazioni. All'analisi :



	N % trovato	14,16
Per $C_{16} H_{17} O_3 N_3$	N % calcolato	14,04

Il prodotto era già stato preparato per azione della p.nitrofenilidrazina sul timochinone da BORSCHÉ, che dà un p. f.  $179^0-80^0$  <sup>1)</sup>).

6) 2',4'dinitro- 2metil- 4ossi- 5isopropilazobenzolo (o.p.dinitrobenzolzotimolo). XXIV. Cristallizzato due volte da  $CH_3COOH$  glaciale si presenta in aghetti rosso-viola a p. f.  $172^0-3^0$ . All' analisi :

	N % trovato	16,50
Per $C_{16} H_{16} O_5 N_4$	N % calcolato	16,27

7) 4'nitro- 3metil- 4ossi- 6isopropilazobenzolo (p.nitrobenzolzocarcacrolo). XXV. Si parte da carvacrolo puro della ditta Merck di Darmstadt. Il colorante, cristallizzato due volte da ligroina  $110^0-20^0$ , si presenta come polvere cristallina rossa a p. f.  $135^0-6^0$ . All' analisi :

	N % trovato	14,13
Per $C_{16} H_{17} O_3 N_3$	N % calcolato	14,03

8) 2',4'nitro- 3metil- 4ossi- 6isopropilazobenzolo (o.p.dinitrobenzolzocarcacrolo). XXVI. Cristallizzato da acido acetico e da alcool si presenta in aghi rosso-viola cupo a p. f.  $200^0$  C. All' analisi :

	N % trovato	15,64
Per $C_{16} H_{16} O_5 N_4$	N % calcolato	16,27

A pH 8 si ottiene una soluzione giallognola torbida che col tempo separa un precipitato ; a pH 9 si ha colorazione viola e col tempo si separa un precipitato rossastro. Il prodotto non ha potuto essere provato come indicatore.

9) 4'nitro- 3metil- 4ossi- 5butilazobenzolo (p.nitrobenzolzobutilesolo). X. Cristallizzato da alcool  $85\%$  e da alcool  $95\%$  si presenta come polvere microcristallina rosso-arancione a p. f.  $136^0-7^0$ . All' analisi :

---

<sup>1)</sup> BORSCHÉ W. — Ueber die Condensation von Nitroderivaten des Phenylhyprazin mit Chinonen und Chinoximen der Benzolreihe : Ann., 357. 171-9 ; 1907.

	N % trovato	13,96
Per $C_{17} H_{19} O_3 N_3$	N % calcolato	13,41

10) 2',4'-nitro- 3metil- 4ossi- 5butilazobenzolo (o.p.dinitrobenzolazo o.butilcresolo). XVII. Cristallizzato da ligroina 110°-20° e da alcool, si presenta come polvere cristallina rosso cupo a p. f. 119°-20°. All'analisi:

	N % trovato	15,70
Per $C_{17} H_{18} O_5 N_4$	N % calcolato	15,64

11) 4'-nitro- 3metil- 4ossi- 5isobutilbenzolo (p.nitrobenzolazo o.iso-butilcresolo). XIII. La copulazione si effettua in ambiente alcolico e in presenza di un eccesso di acetato sodico. A reazione terminata si aggiunge ghiaccio, si lascia in riposo 20'-30' e si filtra il colorante precipitato. Cristallizzato da alcool, da ligroina 80°-90° e ancora da alcool si presenta come polvere microcristallina rossa a p. f. 143°-144°. All'analisi:

	N % trovato	13,30
Per $C_{17} H_{19} O_3 N_3$	N % calcolato	13,41

12) 2',4'-dinitro- 3metil- 4ossi- 5isobutilazobenzolo (o.p.dinitrobenzolazo o.iso-butilcresolo). XXI. La copulazione si effettua in ambiente alcolico e in presenza di acetato sodico in eccesso, come nel caso precedente.

Il colorante, cristallizzato due volte da alcool, si presenta come polvere cristallina rossa a p. f. 152°-3°. All'analisi:

	N % trovato	15,67
Per $C_{17} H_{18} O_5 N_4$	N % calcolato	15,64

13) 4'-nitro- 3metil- 4ossi- 5isoamilazobenzolo (p.nitrobenzolazo o. isoamilcresolo). XIV. Copulazione in ambiente alcolico e in presenza di un eccesso di acetato sodico. Il colorante, cristallizzato da alcool a 95° e da ligroina 110°-20°, si presenta come polvere rosso-arancione microcristallina a p. f. 129°-30°. All'analisi:

	N % trovato	13,16
Per $C_{18} H_{21} O_3 N_3$	N % calcolato	12,84

14) 2',4'-dinitro- 3metil- 4ossi- 5isoamilazobenzolo (o.p.dinitrobenzolazo o. isoamilcresolo). XXII. Copulazione in ambiente alcolico in presenza di un eccesso di acetato sodico. Il colorante, cristallizzato da alcool, si presenta in aghetti rosso arancione a p. f. 108°-9° e, cristallizzato da  $CH_3COOH$ , in aghetti rosso cupo a p. f. 116°-8°. All'analisi:

	N % trovato	14,91
Per $C_{18} H_{20} O_5 N_4$	N % calcolato	15,05

15) 4'nitro- 3metil- 4ossi- 5esilazobenzolo (*p.nitrobenzolazo o.esilcresolo*). XI. Copulazione in ambiente alcolico ed in presenza di acetato sodico in eccesso. Il colorante, cristallizzato da ligroina 80°-90° e da alcool, si presenta come polvere microcristallina rossa a p. f. 130°-1°. All'analisi:

	N % trovato	12,39
Per $C_{19} H_{23} O_3 N_3$	N % calcolato	12,41

16) 2',4' dinitro- 3 metil- 4 ossi- 5 esilazobenzolo (*o.p.dinitrobenzolazo o.esilcresolo*). XVIII. Copulazione in ambiente alcolico e in presenza di un eccesso di acetato sodico. Il colorante, cristallizzato da ligroina 80°-90° e da alcool, si presenta come aghetti microscopici rossi a p. f. 119°-20°. All'analisi:

	N % trovato	14,59
Per $C_{19} H_{22} O_5 N_4$	N % calcolato	14,54

17) 4'nitro- 3metil- 4ossi- 5eptilabenzolo (*p.nitrobenzolazo o.eptilcresolo*). XII. Copulazione in ambiente alcolico e in presenza di un eccesso di acetato sodico. Il colorante, cristallizzato due volte da alcool, si presenta come polvere microcristallina rossa a p. f. 124°-25°. All'analisi:

	N % trovato	11,9
Per $C_{20} H_{25} O_3 N_3$	N % calcolato	11,9

Fornisce soluzioni acquose torbide che non permettono esatte misure colorimetriche. A pH 10,2 risulta colorato in giallo e a pH 10,8 in lilla.

18) 2',4'dinitro- 3metil- 4ossi- 5eptilazobenzolo (*o.p.dinitro o.eptilcresolo*). XIX. Copulazione in ambiente alcolico e in presenza di un eccesso di acetato sodico. Il colorante, cristallizzato due volte da alcool si presenta come polvere microcristallina rossa a p. f. 104°-105°. All'analisi:

	N % trovato	13,98
Per $C_{20} H_{24} O_5 N_4$	N % calcolato	14,00

19) 2',4'dinitro- 3metil- 4ossi- 5laurilazobenzolo (*o.p. dinitrobenzolazo o.laurilcresolo*). XX. Copulazione in ambiente alcolico e in presenza di un eccesso di acetato sodico. Il colorante, cristallizzato da alcool, si

presenta come polvere microcristallina rossa aranciata a p.f. 120°-122°  
All'analisi:

	N % trovato	12,15
Per $C_{25}H_{33}O_5N_4$	N % calcolato	11,97

#### MISURE SPETTROFOTOMETRICHE

Come è stato accennato in principio, ci siamo in primo luogo preoccupati di accertare, con lo studio completo delle isobatte di alcuni esemplari, la validità dell'applicazione della legge di additività. Per i singoli campioni si è proceduto ad una prima grossolana determinazione dell'intervallo di viraggio, avvalendosi delle tabelle di THIEL<sup>1)</sup> per i tamponi di borato-acido cloridrico, fosfato primario-fosfato secondario e di glicina-idrossido di sodio.

Fissati i valori limiti per ottenere il colore nettamente acido ed il colore decisamente basico, si sono poi preparate per ognuno degli indicatori una serie di soluzioni tamponi con intervalli di circa 0,2 unità pH in modo da comprendere l'intero intervallo di viraggio e si sono aggiunti con una microburetta — per ogni 10 cmc — 0,2 cmc della soluzione alcolica dell'indicatore al 0,05%, oppure 0,1 cmc della soluzione al 0,1%, cosicchè le concentrazioni molecolari variavano tra  $10^{-4}$  e  $10^{-5}$  moli.litri<sup>-1</sup>.

Queste soluzioni sono state adoperate per la misura della densità ottica, alle varie lunghezze d'onda, con uno spettrofotometro di Beckmann modello DU, riempiendo una delle vaschette con la soluzione colorata e l'altra con la corrispondente soluzione tampone senza indicatore. Come sorgente si utilizzava la lampada a filamento di tungsteno e come rivelatore la cellula fotoelettrica con sensibilità massima nel visibile: l'apertura della fenditura era di 0,1 mm.

Le soluzioni venivano tenute in termostato a 20° ed, al momento della misura, erano versate nelle vaschette dello spettrofotometro, dello spessore di 1 cm. La temperatura dell'ambiente, di poco diversa da quella del termostato, e la rapidità delle misure, facevano sì che la temperatura finale del campione non differisse mai più di 1° C da quella di 20° C, comportando un errore sensibilmente inferiore alla precisione delle misure.

Oltre alle indagini complete su pochi esemplari tipici, di cui sarà riferito in un successivo lavoro, per tutti gli indicatori, sono state eseguite le misure della lunghezza d'onda  $\lambda_m$  corrispondente al massimo assorbimento per la forma alcalina ed, in corrispondenza di questo valore, sono state

1) F. W. KÜSTER e A. THIEL — *Logaritmi e tabelle per chimici...*; IV ed. italiana (U. Hoepli-Milano, 1950) pp. 150 e segg.



fatte le misure di densità ottica ai valori limiti del pH al fine di dedurne i coefficienti molecolari di estinzione  $\epsilon_{HI}$  della forma acida ed  $\epsilon_{I^-}$  della forma alcalina. Le misure ai valori intermedi del pH davano i valori correnti di  $\epsilon$ , dai quali — e preferibilmente da quelli scelti in vicinanza del punto di semiviraggio, dove il coefficiente molecolare di estinzione assume il valore medio  $\epsilon_{1/2} = \frac{\epsilon_{HI} + \epsilon_{I^-}}{2}$  — si poteva calcolare la costante  $K_u$  e quindi  $pK_u$ .

Ritenuta valida la legge di additività:

$$\epsilon = \alpha \epsilon_{I^-} + (1 - \alpha) \epsilon_{HI}$$

e, tenendo presente la (1), si ricava

$$(2) \quad K_u = \frac{\epsilon - \epsilon_{HI}}{\epsilon_{I^-} - \epsilon} a_{H^+}$$

Relazione la quale ci dice, tra l'altro, che la determinazione è tanto più precisa per quanto più grande è la differenza  $\Delta\epsilon = \epsilon_{I^-} - \epsilon_{HI}$  dei coefficienti di estinzione delle due forme limiti.

Di tutti gli indicatori preparati soltanto due, e cioè XII e XXVI, non hanno potuto essere utilizzati a causa dell'intorbidamento provocato dalla loro scarsa solubilità.

La Tabella II contiene i principali dati ricavati per 17 diversi composti, e cioè: la lunghezza d'onda  $\lambda_m$  in corrispondenza della quale si verifica il massimo assorbimento della soluzione decisamente alcalina; i coefficienti molecolari di estinzione  $\epsilon_{I^-}$  ed  $\epsilon_{HI}$  per le soluzioni limiti alcalina ed acida in corrispondenza della detta lunghezza d'onda, la differenza  $\Delta\epsilon$  dei detti coefficienti; ed il loro valore medio  $\epsilon_{1/2}$ . Infine, nella penultima colonna, si hanno i valori di  $pK_u$  e nell'ultima i colori corrispondenti al passaggio acido  $\rightarrow$  alcalino.

La determinazione della  $\lambda_m$  è solo approssimativa: le misure della densità ottica sono state fatte in corrispondenza dei valori segnati e perciò la determinazione dei coefficienti molecolari di estinzione ha valore indicativo, servendo solo per il tracciamento delle curve della dissociazione apparente.

Per quanto si tratti, per ora, di un esame preliminare, si possono già da esso trarre alcune interessanti deduzioni.

Gli indicatori coprono un notevole intervallo della zona alcalina da  $pK_u = 8,2$  a  $pK_u = 11,4$ : valori che si ricollegano regolarmente con quelli di GLÖCKNER, così come abbiamo potuto ricavarli dai dati che egli ha pubblicato. Includendo anche i valori relativi a questi composti, da noi

TABELLA II

N°.	— R	$\lambda_m$ in m $\mu$	$\epsilon_I \cdot 10^{-3}$	$\epsilon_{HI} \cdot 10^{-3}$	$\Delta \epsilon \cdot 10^{-3}$	$\epsilon_I \cdot 10^{-3}$	p K <sub>a</sub>	Cambiamento di colore acido → alcalino
mononitrobenzolazo alchil o. cresoli								
VIII	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub>	525	33	4	29	18,5	9,1	giallo → viola
IX	n. C <sub>3</sub> H <sub>7</sub>	>	25	1	24	13,0	8,2	giallo → viola
X	n. C <sub>4</sub> H <sub>9</sub>	>	33	7	26	20,0	9,4	giallo → viola
XI	n. C <sub>6</sub> H <sub>13</sub>	>	27	4	23	15,5	10,2	giallo → viola
XII	n. C <sub>7</sub> H <sub>15</sub>	—	inutilizzabile per la scarsa solubilità					
XIII	i. C <sub>4</sub> H <sub>9</sub>	525	29	3	26	16,0	9,2	giallo → viola
XIV	i. C <sub>5</sub> H <sub>11</sub>	>	30	10	20	20,0	9,5	giallo → viola
dinitrobenzolazo alchil o. cresoli								
XV	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub>	600	40	2	38	21,0	8,8	giallo → viola
XVI	n. C <sub>3</sub> H <sub>7</sub>	>	40	4	36	22,0	9,1	giallo → viola
XVII	n. C <sub>4</sub> H <sub>9</sub>	>	42	5	37	23,5	10,0	giallo → viola
XVIII	n. C <sub>6</sub> H <sub>13</sub>	>	39	3	36	21,0	11,0	giallo → azzurro viola
XIX	n. C <sub>7</sub> H <sub>15</sub>	>	56	4	52	30,0	11,4	giallo → viola
XX	n. C <sub>12</sub> H <sub>25</sub>	>	53	2	51	27,5	11,4	giallo → azzurro
XXI	i. C <sub>4</sub> H <sub>9</sub>	>	45	5	40	50,0	9,3	giallo → viola
XXII	i. C <sub>5</sub> H <sub>11</sub>	>	65	8	57	36,5	10,5	giallo → viola
-benzolazotimoli								
XXIII	p.nitro-	525	27	4	23	15,5	8,3	giallo → viola
XXIV	o.p.dinitro-	575	35	4	31	19,5	8,6	giallo → viola
-benzolazocarvacroli								
XXV	p.nitro-	575	20	3	17	11,5	8,2	giallo → viola
XXVI	o.p.dinitro-	—	inutilizzabile per la scarsa solubilità					

tabulati nella parte introduttiva di questa nota, l'intervallo si estende fino a  $pK_u = 7,6$ .

Passando dalla serie dei mononitroderivati a quella dei dinitroderivati, a parità di ogni altra condizione, il punto di semiviraggio si sposta verso la zona alcalina. Ciò è in contrasto con l'andamento generale constatato da GLÖCKNER; ma è conforme al caso eccezionale, che si può dedurre dalle sue misure, e che si verifica in seguito alla introduzione del secondo gruppo nitrico nel composto ottenuto a partire dal m-xilenolo vicinale. Infatti questo A. trova  $pK_u = 7,9$  per l'o.mononitrobenzolazo o.metilcresolo, e  $pK_u = 8,5$  per l'o.p.dinitrobenzolazo o.metilcresolo.

Si osserva inoltre che anche un graduale spostamento verso la zona alcalina si verifica a misura che cresce il numero degli atomi di carbonio nella catena laterale: questo spostamento si verifica in modo piuttosto irregolare nella serie dei mononitroderivati diventa invece uniforme nel caso dei dinitroderivati. Anzi quest'ultima serie può essere integrata con due composti che sono stati studiati da GLÖCKNER, e che corrispondono alle sostituzioni  $R = -H$  ed  $R = -CH_3$ , composti per i quali abbiamo dedotto che  $pK_u = 7,5$  e  $pK_u = 8,5$  rispettivamente, e cioè valori che si uniformano all'andamento regolare risultante dalle nostre misure.

Mancano ancora, per completare le nostre serie, i derivati con la catena isopropilica e quelli con la catena amilica normale, che ci proponiamo di preparare in seguito, e che saranno molto utili per stabilire meglio il confronto tra l'influenza che esercitano le catene normali e quella che si risente da parte delle catene ramificate. Intanto — paragonando il composto X con il XIII, ed il composto XVII con il XXI rispettivamente — si osserva che il passaggio della catena butilica normale a quella ramificata provoca una diminuzione del valore di  $pK$ . D'altra parte il confronto possibile tra i due mononitroderivati del timolo e del carvacrolo e cioè tra i composti XXIII e XXV starebbe ad indicare che — a parità di gruppi alchilici sostituiti nell'anello benzenico del fenolo — la loro posizione non ha grande influenza sul punto di semiviraggio. Il confronto sarebbe più convincente se lo si potesse estendere, come già osservato, ai benzolazo o.isopropilcresoli; ma fin d'ora si può dire che la precedente conclusione potrebbe essere generalizzata, se si potesse pensare che anche i derivati isopropilici risentissero, rispetto al valore che si conosce per i derivati propilici normali (IX e XVI), la stessa variazione del  $pK$ , che le nostre misure denunciano nel passaggio dai derivati isobutilici a quelli butilici normali.

Nel complesso si constata che — per la regolarità delle variazioni del  $pK$ , per i valori più elevati delle differenze  $\Delta\epsilon$  e per la maggiore estensione del campo abbracciato — la serie dei dinitroderivati è quella maggiormente degna di interesse. Essa andrebbe utilmente integrata con la preparazione di

qualche rappresentante della serie dei trinitroderivati nella speranza di poter ancor più estendere l'intervallo nella zona acida, qualora venisse confermato, con altri campioni e con misure più precise, quello che appare dalle sommarie ricerche di GLÖCKNER, e cioè che l'introduzione del terzo gruppo nitrico provoca uno spostamento del punto di semiviraggio verso valori più bassi del pH e che in tutta la serie di questi trinitroderivati l'introduzione dei gruppi alchilici agisce in senso inverso, provocando gradualmente spostamenti verso la zona acida.

Il completamento dell'indagine, che è ora in corso, comprenderà anche l'esame dell'errore di sale e dell'errore proteico di questi indicatori.

*Napoli, giugno 1953.*

*Istituti di Chimica Organica e di Chimica Generale dell'Università.  
Centro Studi Chimica Applicata del C. N. R.*

# LE FALDE t-DIMENSIONALI ANALITICHE, ALGEBRICHE ED UNIRAZIONALI DI UN $S_r$ SUPERCOMPLESSO

*Nota del socio ordinario Nicolò Spampinato*

(Adunanza del dì 6 giugno 1953)

**Sunto.** — Si estendono ad un  $S_r$  supercomplesso le nozioni fondamentali relative alle falde dell' $S_r$  complesso.

## 1. — $S_r$ supercomplesso. Rami analitici algebrici e razionali.

Sia  $A$  un'algebra complessa, di ordine  $n$ , dotata di modulo, commutativa ed irriducibile ed  $S_r$  lo spazio supercomplesso di dimensione  $r$  rispetto ad  $A$ , legato ad  $A$ , costituito dalle  $(r+1)$ -ple di numeri supercomplessi di  $A$ , di caratteristica massima, definite a meno di un fattore in  $A$ , non nullo nè divisore dello zero. Un punto  $M(\mu_1, \dots, \mu_{r+1})$  di  $S_r$  le cui coordinate supercomplesse, date dai numeri supercomplessi  $\mu_j$  si dirà che descrive un ramo analitico di  $S_r$  di equazioni parametriche

$$(1) \quad \mu_j = \mu'_j + c_{j1}\sigma + c_{j2}\sigma^2 + c_{j3}\sigma^3 + \dots$$

con i secondi membri serie di potenze della variabile supercomplessa  $\sigma$  in  $A$  con un campo di convergenza comune nell'intorno di  $\sigma=0$ . Dividendo



eventualmente i coefficienti della  $(r+1)$ -pla di serie per un fattore non nullo nè divisore dello zero, possiamo supporre, senza venir meno alla generalità, che i numeri supercomplessi  $\mu'_j$  non siano tutti nulli. Se la caratteristica della  $(r+1)$ -pla  $(\mu'_j)$  è massima, il punto  $M'(\mu'_j)$  si dirà *origine del ramo*. Se detta caratteristica (supposto  $n > 1$  cioè  $A$  non coincidente col corpo complesso nel qual caso le (1) sarebbero le equazioni di un ramo dell' $S_r$  complesso) è  $<$  di  $n$ , cioè non massima, il ramo analitico (1) dell' $S_r$  supercomplesso si dirà che ha per origine, non un punto, ma un  $(v+1)$ -punto <sup>1)</sup>, se detta caratteristica è  $n-v$  e quindi  $v$  la *nullità*.

Il ramo analitico si dirà in particolare *algebrico* in  $S_r$  se appartiene ad una ipersuperficie algebrica dell' $S_r$  supercomplesso ambiente.

Se le serie a secondo membro delle (1) sono tutte con un numero finito di termini, posto  $\sigma = h:k$  con  $h$  e  $k$  variabili supercomplesse di  $A$ . le (1), moltiplicando i secondi membri per la massima potenza di  $k$  nei denominatori, ci danno le equazioni parametriche del ramo in coordinate supercomplesse omogenee  $(h, k)$

$$(2) \quad \mu_j = \mu'_j{}^m + c_j h k^{m-1} + \dots + c_{jm} h^m$$

In questo caso, per il teorema di Luroth, che abbiamo già esteso ad un  $S_1$  supercomplesso <sup>2)</sup>, il ramo si può mettere in corrispondenza birazionale con i punti dell' $S_1$  supercomplesso legato ad  $A$  corrispondendo  $M'(\mu'_j)$  al punto  $(O, u)$  dell' $S_1$  indicando con  $u$  il modulo dell'algebra. Un tale ramo si dirà *razionale*. Un iperpiano  $S_{r-1}$  dell' $S_r$  supercomplesso seca il ramo razionale, se non vi appartiene, in  $m$  punti, perchè in  $A$  un'equazione algebrica di grado  $m$  in una variabile ammette  $m$  radici, come nel caso complesso.

Nel caso  $m=1$  il ramo è un  $S_1$  dell' $S_r$  supercomplesso contenente il punto, o  $(v+1)$ -punto,  $M'(\mu'_j)$ . Nel caso  $m > 0$  il ramo costituisce quell'ente che diremo *curva supercomplessa razionale, di ordine  $m$ , dell' $S_r$  supercomplesso, passante per  $M'$* , e di equazioni parametriche (2) con i parametri supercomplessi omogenei  $(h, k)$  di caratteristica massima. La corrispondenza fra i punti  $M(\mu_j)$  della curva razionale sudetta ed i punti dell' $S_1$  supercomplesso numerico costituito dalle dette coppie  $(h, k)$  di caratteristica massima e definite a meno di un fattore non nullo, nè divisore dello zero, nel caso generico risulta  $(1, 1)$  con  $l \geq 1$ , ma per il teorema che estende all' $S_1$  supercomplesso il teorema su ricordato di Lüroth, ai

<sup>1)</sup> N. SPAMPINATO, *Ipersuperficie e tipersuperficie di un  $S_r$  ipercomplesso* Rend. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, s. 4<sup>a</sup>, vol. XVIII, 1952.

<sup>2)</sup> N. SPAMPINATO, *Sull'estensione del teorema di Lüroth dall' $S_1$  complesso all' $S_1$  ipercomplesso*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, s. 4<sup>a</sup>, vol. XIX, 1952.

parametri  $(h, k)$  si può sostituire un'altra coppia di parametri  $(h_i, k_i)$  in modo che detta corrispondenza risulta biunivoca, e quindi:

*La curva razionale supercomplessa dell'  $S_r$  supercomplesso è una trasformata birazionale dell'  $S$  supercomplesso legato alla stessa algebra di numeri supercomplessi. Si possono scrivere le equazioni parametriche di questa nella forma (2) con i parametri omogenei  $(h, k)$ , supercomplessi, mettendo in evidenza il ramo razionale di origine  $M'$ , rispondente al ramo razionale dell'  $S$ , supercomplesso numerico  $(h, k)$ , avente per origine  $(O, u)$ , di equazioni parametriche  $h = \sigma, k = u$ , col parametro non omogeneo supercomplesso  $\sigma$ . Si possono supporre, inoltre, le (2) razionalmente invertibili variando il punto  $(\mu_j)$  nella curva razionale e  $(h, k)$  nell'  $S_1$  supercomplesso.*

## 2. — Rami razionali ridotti di un ramo analitico supercomplesso.

Siano le (1) le equazioni parametriche di un ramo analitico avente per origine il punto  $M' (\mu'_j)$ , dell'  $S_r$  supercomplesso legato all'algebra  $A$ , e quindi con la  $(r+1)$ -pla  $(\mu'_j)$  di caratteristica massima.

Nel caso generico la caratteristica della  $(r+1)$ -pla  $(c_{j1})$  è massima ed il punto  $C_1$  dell'  $S_r$  supercomplesso che ha le coordinate  $(c_{j1})$  risulta indipendente dal punto  $M'$ . La retta supercomplessa  $M' C_1$ , di equazioni parametriche

$$(3) \quad \mu_j = \mu'_j + c_{j1} \sigma,$$

e quindi di equazioni

$$(3') \quad (\mu_j - \mu'_j) c_i = (\mu_i - \mu'_i) c_{j1} \quad (i, j = 1, \dots, r+1),$$

costituisce ciò che diremo il *primo ramo razionale ridotto del ramo analitico di equazioni (1)*.

Nel caso generico anche la  $(r+1)$ pla  $(c_{j1})$  risulta di caratteristica massima, e, se è  $r > 1$ , i punti  $M' C_1$  e  $C_1 (c_{j2})$  risultano indipendenti. Il piano  $M' C_1 C_2$  supercomplesso conterrà il ramo razionale di equazioni parametriche

$$(4) \quad \mu_j = \mu'_j + c_{j1} \sigma + c_{j2} \sigma^2,$$

che diremo *secondo ramo razionale ridotto del ramo analitico (1)*.

In generale diremo *m-o ramo razionale ridotto del ramo analitico (1)* il ramo razionale di equazioni parametriche

$$(5) \quad \mu_j = \mu'_j + c_{j1} \sigma + c_{j2} \sigma^2 + \dots + c_{jm} \sigma^m,$$

costituente, per quanto abbiamo detto nel n° 1, la curva supercomplessa

razionale di equazioni parametriche (2) con i parametri omogenei supercomplessi  $(h, k)$ .

Osserviamo ora che sostituendo le (5) nelle equazioni (3') della retta supercomplessa  $M' C$ , costituenti il primo ramo ridotto, si ha

$$(6) \quad (c_{j2} \sigma^2 + \dots + c_{jm} \sigma^m) c_{i1} = (c_{i2} \sigma^2 + \dots + c_{im} \sigma^m) c_j.$$

Dato che la (6) ammette sempre almeno come doppia la radice  $\sigma=0$ , ogni iperpiano supercomplesso di equazione (3'), passante per  $M'$ , seca la curva supercomplessa di ordine  $m$  di equazione (5) nel punto  $M'$ , rispondente a valore  $\sigma=0$  del parametro, contato almeno due volte, cioè risulta tangente a detta curva in  $M'$ . Ne segue che la retta  $M' C$ , come intersezione di iperpiani tutti tangenti a tale curva, sarà la tangente a questa nel punto  $M'$ . Si ha perciò:

*La curva supercomplessa razionale, di ordine  $m$ , costituente l' $m$ -mo ramo ridotto di un generico ramo analitico dell' $S_r$  supercomplesso con  $m > 1$ , ha sempre come tangente nell'origine  $M'$  del ramo la retta supercomplessa costituente il primo ramo ridotto del ramo analitico.*

### 3. Falda $t$ -dimensionale dell' $S_r$ supercomplesso e suoi rami naturali.

Un punto  $M(\mu_1, \dots, \mu_{r+1})$  dell' $S_r$  supercomplesso si dirà che descrive un falda  $t$ -dimensionale di equazioni parametriche

$$(7) \quad \mu_j = Z_j(\sigma_1, \dots, \sigma_t)$$

con i secondi membri generiche serie di potenze di  $t$  variabili supercomplesse  $\sigma_1, \dots, \sigma_t$  nell'algebra  $A$ , convergenti in un campo comune di convergenza, intorno del punto  $\sigma_1 = \dots = \sigma_t = 0$  dell' $S_t$  euclideo supercomplesso legato ad  $A$ , con  $t \leq r$ . Fissato in  $S_t$  un ramo analitico di equazioni parametriche, in coordinate (non omogenee)  $(\sigma, \dots, \sigma_t)$ , con l'origine nel punto  $(0, \dots, 0)$ :

$$(8) \quad \sigma_i = c_{i1} \sigma + c_{i2} \sigma^2 + c_{i3} \sigma^3 + \dots$$

sostituendo le (8) nelle (7) si hanno le equazioni

$$(9) \quad \mu_j = Z_j^*(\sigma)$$

con i secondi membri serie di potenze nella variabile supercomplessa  $\sigma$ , rappresentanti un ramo analitico contenuto nella falda  $t$ -dimensionale data che si dirà il *ramo naturale* della falda rispondente al ramo fissato

in  $S_t$  con l'origine nel punto  $(0, \dots, 0)$ , estendendo una definizione già introdotta per le falde  $t$ -dimensionali dell' $S_r$  proiettivo complesso <sup>1)</sup>.

Se le serie  $Z_j(\sigma_i)$  hanno i termini di grado zero nelle  $\sigma_i$  non tutti nulli, diciamo  $\mu'$ , saranno questi stessi termini quelli di grado zero nelle (9), perchè nelle (8) non vi sono termini di grado zero in  $\sigma$ . Ne seguirà che il ramo naturale di equazioni (9) ha per origine il punto, o bipunto, o, in generale  $(v+1, -\text{punto}, M'(\mu_j'))$ . Tale punto si dirà, in tal caso) l'*origine* della falda  $t$ -dimensionale. Esso risulta l'origine di tutti i rami naturali della falda.

Se le serie  $Z_j(\sigma_i)$  hanno, invece, i termini di grado zero nelle  $\sigma_i$  tutti nulli, lo stesso avverrà per la serie (9), le quali risulteranno, pertanto, tutte divisibili per una potenza di  $\sigma$ , e precisamente per  $\sigma^\eta$  se è  $\eta$  il minimo esponente con il quale si ha un termine a coefficiente non nullo nelle  $r+1$  serie  $Z_j^*(\sigma)$ . Se diciamo  $f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_t)$  la forma di grado  $\eta$ , quando non è identicamente nulla, in cui sono raccolti tutti i termini di grado  $\eta$  nelle  $\sigma_1, \dots, \sigma_t$  nella serie  $Z_j(\sigma_i)$ , il coefficiente del termine di grado  $\eta$  nelle serie  $Z_j^*(\sigma)$  sarà dato dal (numero supercomplesso) valore assunto dalla forma  $f_j(\sigma, \dots, \sigma_t)$  quando alle variabili  $\sigma, \dots, \sigma_t$  si sostituiscono i coefficienti di  $\sigma$  (col grado 1)  $c_1, \dots, c_t$ , nelle  $t$  serie (8). Sicchè quando le  $r+1$  serie (9) si dividono per  $\sigma^\eta$  i termini noti delle serie che si ottengono, diciamo  $\mu_j^*$ , sono dati da

$$(10) \quad \mu_j^* = f_j(c_1, \dots, c_t)$$

Le (10) ci danno le coordinate dell'origine del ramo naturale di equazioni parametriche (9) rispondente, nella falda  $t$  dimensionale, al ramo di  $S_t$  di equazioni (8). Facendo variare questo ramo fra tutti i rami analitici di  $S_t$  con l'origine nel punto  $(0, \dots, 0)$ , avremo gl'infiniti rami naturali della falda, ciascuno dei quali avrà un origine  $M^*(\mu_j^*)$  con le coordinate date dalle (10). La varietà descritta da  $M^*$ , al variare del ramo (8) e quindi dei coefficienti di  $\sigma$ , avrà le equazioni parametriche (10) considerando come parametri i numeri supercomplessi  $c_1, \dots, c_t$ , ovvero le equazioni parametriche

$$(11) \quad \mu_j = f_j(\sigma_1, \dots, \sigma_t)$$

Questa varietà (che può anche ridursi ad un punto) si dirà l'*origine della falda*. Essa risulta *unirazionale* perchè le  $f_j(\sigma_i)$  sono delle forme, e quelle non identicamente nulle dello stesso grado  $\eta$ , intero che si dirà l'*esponente all'origine* della falda.

<sup>1)</sup> Qui si estende una definizione già introdotta nel campo complesso: N. SPAMPINATO, *Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie di indice  $n$* , Nota VIII, n° 49. Rend. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, s. 4<sup>a</sup>, vol. XVIII, 1951.



La massima dimensione supercomplessa che può avere tale varietà origine, di equazioni parametriche (11), è  $t-1$ , perchè le  $f_j$  non identicamente nulle sono *forme* nelle  $t$  variabili supercomplesse  $\sigma_i$ , e quindi moltiplicando le  $\sigma_i$  per un fattore supercomplesso non nullo nè divisore dello zero, lo stesso avviene per le  $\mu_j$  che vengono moltiplicate per una potenza di tale fattore: quella di esponente  $\eta$ , ed il punto  $(\mu_j)$  non cambia, dato che tale potenza risulterà, come la base, un numero supercomplesso non nullo, nè divisore dello zero.

Le sezioni iperpiane della varietà ottenuta con l'iperpiano di  $S_r$  di equazione

$$(12) \quad \lambda \mu_1 + \dots + \lambda_{r+1} \mu_{r+1} = 0$$

con la  $(r+1)$ -pla  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1})$  di caratteristica massima, risponde ai punti dell' $S_{t-1}$  supercomplesso legato ad A, in cui si considerano le coordinate omogenee  $(\sigma_1, \dots, \sigma_t)$ , di caratteristica massima, soddisfacenti all'equazione

$$(13) \quad \lambda f_1(\sigma_i) + \dots + \lambda_{r+1} f_{r+1}(\sigma_i) = 0$$

che rappresenta una ipersuperficie supercomplessa di ordine  $\eta$ . La varietà origine risulta massima quando le ipersuperficie del sistema di equazioni (13), al variare dell'iperpiano (12) in  $S_t$ , passanti per un assegnato punto non base per il sistema o non passano per nessun'altro punto o passano al più per un numero finito di altri punti, cioè, come nel caso complesso o quando il sistema è *semplice*, o quando è *composto con una involuzione di gruppi di punti* di  $S_t$ . La dimensione della varietà risulta invece  $< t-1$  quando il detto sistema lineare di ipersuperficie risulta composto con una congruenza di varietà di dimensione  $> 0$ .

L'origine, nel caso estremo, si riduce ad un punto, quando il sistema (13) risulta di dimensione supercomplessa zero, cioè ad una sola ipersuperficie, ciò che avviene quando e solo quando le forme  $f_j(\sigma_i)$  sono il prodotto di  $r+1$  numeri supercomplessi  $(h_1, \dots, h_{r+1})$  a caratteristica massima per una stessa forma  $g(\sigma_i)$  di grado  $\eta$ . In tal caso la varietà origine si riduce al solo punto  $H(h_1, \dots, h_{r+1})$ .

## MOMENTO ELETTRICO DELL' ACIDO P-AMMINOSALICILICO

*Nota dei dott. Jannelli Liliana, Giordano Orsini Paolo e Daniele Giorgio  
presentata dal socio F. Giordani.*

(Adunanza del dì 6 giugno 1953)

**Sunto.** — Sono state eseguite misure di densità, di indice di rifrazione e di costante dielettrica su soluzioni di acido p-amminosalicilico in diossano, con lo scopo di giungere attraverso i più esatti metodi di estrapolazione al calcolo della polarizzazione molecolare limite del soluto e quindi del momento elettrico dipolare dell'acido p-amminosalicilico, non ancora noto.

Il valore trovato ( $\mu = 3,20$  D) e l'andamento delle polarizzazioni molecolari parziali del soluto alle basse concentrazioni fanno pensare alla possibilità di fenomeni di associazione per tramite di legami di idrogeno.

L'acido p-amminosalicilico, per il suo comportamento chimico e per la sua specifica azione chemioterapica, ha da tempo attratto l'attenzione degli studiosi, alla ricerca di relazioni tra struttura e proprietà dei composti.

GIACOMELLO e collaboratori (1) hanno eseguito l'analisi PATTERSON e la sintesi FOURIER, giungendo alla conclusione che la posizione reciproca, delle molecole di acido p-amminosalicilico nella cella elementare denunzi la presenza di interazioni tra i gruppi carbossilici, con distanze dell'ordine di quelle che si realizzano quando si formano legami di idrogeno.

Profittando della sufficiente solubilità dell'acido p-amminosalicilico nel diossano, abbiamo pensato di potere utilizzare questo solvente per eseguire le misure necessarie alla determinazione del momento elettrico dipolare come era del resto già stato fatto per gli acidi amminobenzoici (2).

I valori ottenuti da VAN BLARICOM e GILBERT per questi tre isomeri, regolarmente crescenti dall'orto- al para-, permettevano d'altra parte di escludere che, nel solvente apolare prescelto, si presentassero quelle stesse anomalie di comportamento, che erano state riscontrate da DEVOTO nelle soluzioni acquose e dovute alla formazione di ioni ibridi (3).

Partendo dalle misure eseguite sulle soluzioni, abbiamo valutato la polarizzazione molecolare ideale  $P_2^0$  del soluto, estrapolando al limite  $N_2 \rightarrow 0$  per mezzo della equazione di HALVERSTADT e KUMLER (4), che deriva dal metodo di HEDESTRAND (5):

$$(1) \quad P_2 = \frac{3\alpha'}{(\epsilon_1 + 2)^2} \frac{M_1}{d_1} + \left( \frac{M_2}{M_1} - \frac{\beta''}{d_1} \right) \frac{M_1}{d_1} \frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1 + 2}$$

$\epsilon_1$  indica la costante dielettrica del solvente  
 $d_1$  » la densità del solvente  
 $M_1$  » il peso molecolare del solvente  
 $M_2$  » il peso molecolare del soluto  
 ed inoltre

$$\alpha' = \lim_{N_2 \rightarrow 0} \left( \frac{\partial \epsilon_{1,2}}{\partial N_2} \right) \text{ e } \beta' = \lim_{N_2 \rightarrow 0} \left( \frac{\partial d_{1,2}}{\partial N_2} \right)$$

Si indicano con  $\epsilon_{1,2}$  e con  $d_{1,2}$  rispettivamente le costanti dielettriche e la densità delle soluzioni, con  $N_2$  la frazione molare del soluto.

Per la valutazione di  $\alpha'$  e di  $\beta'$  abbiamo calcolato, in base ai valori corrispondenti alle concentrazioni più basse, ed utilizzando il metodo dei minimi quadrati, i coefficienti delle equazioni lineari

$$\epsilon_{1,2} = \epsilon_1 + \alpha' N_2 \quad (2) \quad \text{e} \quad d_{1,2} = d_1 + \beta' N_2 \quad (3)$$

il che riesce sempre più sicuro della determinazione grafica per mezzo della tangente alla curva. Seguendo il consiglio di HALVERSTADT e KUMLER, nel calcolo numerico dei coefficienti della (2), non si è compreso il valore di  $\epsilon_1$  misurato sul solvente puro ed inoltre nella formula (1) si è utilizzato il valore di  $\epsilon_1$  risultante dalla estrapolazione per mezzo della (2). Invero, così operando, gli AA. citati pretendono di potere eliminare l'errore dovuto all'effetto del solvente, il che non può effettuarsi se non ricorrendo alle formule che derivano dalla trattazione di ONSANGER (6), il quale tien conto del campo di reazione sul dipolo. Per il momento però non ci è sembrato che i nostri dati avessero la precisione necessaria per questa ulteriore approssimazione sulla quale ci riserviamo di ritornare.

Per passare dal valore  $P_2^0$  al valore del momento elettrico dipolare, abbiamo valutato la polarizzazione molecolare elettronica  $P_e$  a partire dall'indice di rifrazione per la riga D del sodio, trascurando di estrapolare fino al valore  $n_\infty$  corrispondente a lunghezze d'onda infinitamente grandi. Poichè di regola  $n_D > n_\infty$  e quindi questa semplificazione conduce a valutare  $P_e$  in eccesso, ci siamo limitati ad assumere per  $P_\infty$ , e cioè per la polarizzazione atomica, soltanto il 5% del valore di  $P_e$ .

### *Prodotti e metodi d'esperienza.*

Il diossano della Eastman Organic Chemicals è stato scaldato a ricadere per circa 10 ore su idrossido di sodio e poi, per un uguale periodo di tempo, sul sodio metallico, e quindi rettificato con colonna a riflusso (7).

La frazione utilizzata aveva le seguenti costanti fisiche:

$$d_{4^0}^{25^0} = 1,02813 ; \quad n_D^{25^0} = 1,41862 ; \quad \epsilon^{25^0} = 2,301$$

L'acido p amminosalicilico è stato cristallizzato più volte dall'alcole metilico. Il benzolo, il tetracloruro di carbonio e l'etere etilico, adoperati per la taratura degli apparecchi, sono stati purificati con i soliti metodi ed accuratamente disidratati.

Le soluzioni diossaniche sono state sempre preparate per pesata ed immediatamente adoperate, data la loro alterabilità. Tutte le misure sono state eseguite alla temperatura di  $25^0 \pm 0,02^0$  C.

Le misure di densità, eseguite con pnenometri opportunamente tarati con acqua di conduttività, riducendo la pesata nel vuoto, erano riproducibili nei limiti di  $5 \cdot 10^{-5}$  unità.

Le misure dell'indice di rifrazione sono state eseguite con un refrattometro di Abbe, di cui la scala è stata fissata e verificata per mezzo di ripetute misure su acqua, benzolo, tetracloruro di carbonio ed etere etilico purificati. La temperatura era mantenuta costante, nei limiti sopra indicati, per mezzo di un ultratermostato di Höppler. La sorgente luminosa era data da una lampada a vapori di sodio.

Per le misure della costante dielettrica si è adoperato un apparecchio a risonanza, costruito dalle « Wissenschaftliche—Technische Werkstätten » del dr. SLEVOGT di Wessobrunn (Dekameter tipo DK 03), che operava alla frequenza di 1,875 Mhz. La cellula utilizzata (M F L I) consisteva di coprire l'intervallo da 1,9 a 4,7 e perciò la taratura è stata eseguita con miscele di benzolo ( $\epsilon^{25^0} = 2,282$ ) e di etere etilico ( $\epsilon^{25^0} = 4,265$ ) utilizzando i dati di WILLIAM e KRCHMA (8). Anche in questo caso la costanza della temperatura era assicurata da un ultratermostato di HÖPPLER con circolazione nel mantello esterno della cellula. Si poteva così garantire la terza cifra decimale

### *Risultati sperimentali.*

I valori  $d_{1,2}$  ottenuti nelle misure di densità sono riportati nella tabella I, dove essi figurano accanto alle corrispondenti frazioni molari  $N_2$  del soluto ed insieme con i valori calcolati per mezzo della formula di interpolazione:

$$d_{1,2} = 1,0281 + 0,514 N_2$$

che li rappresenta con una deviazione massima di 0,0003. Abbiamo perciò assunto  $\alpha' = 0,514$ .



TABELLA I

$N_1$	$d_{1,2}$	
	oss.	calc.
0,000000	1,02813	1,0281
0,001480	1,02905	1,0288
0,002943	1,02976	1,0296
0,005690	1,03120	1,0310
0,007030	1,03196	1,0317
0,008916	1,03268	1,0327
0,011921	1,03412	1,0342
0,013739	1,03506	1,0352
0,016400	1,03653	1,0365
0,018906	1,03764	1,0378
0,022515	1,03990	1,0396
0,024517	1,04087	1,0407

I valori  $(n_D)_{1,2}$  per l'indice di rifrazione delle soluzioni figurano nella seconda colonna della tabella II, accanto ai corrispondenti valori della frazione molare  $N_2$  del soluto. Nella terza colonna si hanno le rifrazioni

$$\text{molecolari } R_{1,2} = \frac{(n_D)^2_{1,2} - 1}{(n_D)^2_{1,2} + 2} \frac{M_1 (1 - N_2) + M_2 N_2}{d_{1,2}}$$

Nella quarta colonna ci sono i valori  $R_2$  della refrattività molecolare del soluto, calcolati con la legge di addittività, ponendo  $R_1 = 21,6980$ .

Questi valori presentano soltanto deviazioni erratiche attorno alla media di 42,31, che si assume come valore della polarizzazione molecolare elettronica  $P_e$  senza ricorrere alla estrapolazione.

Infine i risultati delle misure di costante dielettrica  $\epsilon_{1,2}$  sulle soluzioni sono registrati nella tabella III, accanto ai valori delle corrispondenti frazioni molar del soluto,  $N_2$ . Fino al valore 0,00929 di quest' ultima grandezza l'andamento è sensibilmente lineare, e permette di calcolare col metodo dei minimi quadrati la formula di interpolazione :

$$\epsilon_{1,2} = 2,300 + 15,933 N_2$$

e quindi di assumere i valori  $\epsilon_1 = 2,300$  ;  $\beta^* = 15,933$ .

La minima differenza, tra il valore di  $\epsilon_1$  misurato direttamente sul solvente puro (2,301) e quello derivato usando la predetta formula per

TAVOLA II

$N_2$	$(n_D)_{1,2}$	$R_{1,2}$	$R_2$
0,000000	1,41862	21,6280	
0,005689	1,42067	21,7458	42,34
0,007030	1,42110	21,7721	42,13
0,008969	1,42190	21,8183	42,85
0,009506	1,42198	21,8248	42,33
0,012449	1,42299	21,8856	42,32
0,012530	1,42323	21,8968	42,08
0,016041	1,42444	21,9729	42,13

l'estrapolazione (2,300), sta ad indicare che le manipolazioni eseguite per preparare le soluzioni non hanno dato luogo a sensibili alterazioni del solvente.

Nella quarta colonna della tabella figurano le polarizzazioni molecolari

$$P_{1,2} = \frac{\epsilon_{1,2} - 1}{\epsilon_{1,2} + 2} \frac{M_1(1 - N_2) + M_2N_2}{d_{1,2}}$$

alle varie concentrazioni e, nella quinta, i valori delle polarizzazioni molecolari parziali del soluto  $P_2$ , calcolati con la formula di addittività.

### *Discussione dei risultati*

In base ai dati precedenti possiamo sostituire nella formula (1) i valori:  $\epsilon_1 = 2,300$ ;  $M_1 = 88,1048$ ;  $M_2 = 153,137$ ;  $\alpha' = 0,514$ ;  $\beta' = 15,933$ ;  $d_1 = 1,0281$ ; ricavando:

$$P_2^0 = 253,60 \text{ cmc}$$

Tenendo conto poi degli altri valori sopra ricavati, e cioè  $P_e = 42,31$  e  $P_a = 0,05P_e = 2,11$ ; si può valutare la polarizzazione molecolare di orien-

TABELLA III

N <sub>2</sub>	ε <sub>1,2</sub>		P <sub>1,2</sub>	P <sub>2</sub>
	oss.	calc.		
0,000000	2,301	2,300	25,921	
0,001172	2,320	2,319	26,191	256,57
0,005681	2,392	2,391	27,197	250,45
0,007043	2,411	2,412	27,458	244,12
0,007212	2,415	2,415	27,512	246,55
0,007376	2,418	2,418	27,553	247,17
0,009290	2,446	2,448	27,932	242,41
0,01349	2,530		29,036	256,81
0,01410	2,545		29,228	260,48
0,01448	2,552		29,317	260,47

mento, e cioè  $P^0_0 = 209,18$ . Da cui si deduce il momento elettrico dipolare  $\mu$ , con la relazione

$$\mu = 0,01281 \sqrt{P^0_0 \cdot T}$$

e cioè, nel nostro caso,  $\mu = 3,20$  D.

Prendendo ora in esame i valori delle polarizzazioni molecolari parziali  $P_2$ , calcolati con la legge di addittività e figuranti nell'ultima colonna della Tabella III, si osserva che essi presentano, già nell'intervallo iniziale un andamento prima decrescente e poi crescente al crescere di  $N_2$ . Purtroppo il piccolo intervallo esplorabile non consente di trarre sicure conclusioni da questo andamento caratteristico, nè le misure—eseguite per ora ad una sola temperatura—consentono di discriminare l'influenza di una eventuale associazione da quella delle azioni mutue, prese in considerazione da ONSANGER [loc. cit. in (6)].

L'andamento di cui parlasi, chiaramente visibile sul diagramma della fig. 1, e specialmente la posizione del minimo, che compare intorno ad  $N_2 = 0,01$ , farebbero propendere piuttosto per un fenomeno di associazione, attraverso legame di idrogeno.

Le misure dei momenti dipolari sugli acidi amminobenzoici, eseguite da VAN BLARICOM e GILBERT (loc. cit.), forniscono valori che sono soltanto in grossolano accordo con quelli che si possono calcolare, col metodo di WILLIAMS (9), attraverso la composizione vettoriale dei momenti dovuti ai

singoli gruppi sostituenti nel nucleo benzenico. Ed anche per ottenere questo grossolano accordo, gli AA. hanno dovuto assumere quali momenti dei gruppi: + 1,5 D per  $\text{-NH}_2$  e -1,9 D per  $\text{-COOH}$ , mentre per questo ultimo si assume di regola - 1,7 D. Purtuttavia il momento elettrico dipolare per l'acido para risulta ancora troppo piccolo e cioè uguale a 3,40 D, contro il valore osservato di 3,51 D.

Nel passaggio dall'acido p-amminobenzoico all'acido p-amminosalicilico, l'introdu-

zione del gruppo idrossilico - cui compete un momento elettrico di -1,7 D - in posizione orto rispetto al carbossile, provoca una diminuzione del momento elettrico dipolare della molecola da 3,51 D a 3,20 D. A parte il segno della variazione, il suo ammontare è tanto piccolo da costituire un forte indizio di sensibili interazioni nell'interno stesso della molecola.

Tutto ciò non è privo d'interesse, essendo noto che la formazione di ponti intramolecolari può avere importanza ai fini delle azioni biologiche (10).

Per chiarire meglio questo punto possono essere di utile sussidio le indagini, che abbiamo in corso, per la determinazione dell'assorbimento nell'ultravioletto (11).

*Napoli, giugno 1953. Istituto Chimico dell'Università.  
Centro Studi Chimica Applicata del C. N. R.*

## BIBLIOGRAFIA

1. — ADDAMIANO A., ROMEO A. e PALLOTTA U. — *Struttura dell'acido 4-ammino 2-ossibenzoico*: Ricerca Scientifica, **20**, 961-5; 1950.  
COCCIA S., GIACOMELLO G. e LIQUORI A. M. — *Struttura dell'acido 4-ammino 2-ossibenzoico*. Nota II: Ibid., **21**, 205-12; 1951.
2. — VAN BLARICOM L. and GILBERT E. C. — *The dipole moment of aminobenzoic acids in dioxane*: J. Am. Chem. Soc., **61**, 3238-9; 1939.
3. — DEVOTO G. — *Ricerche sulla costante dielettrica dei liquidi. X. Soluzioni acquose degli acidi amminobenzoici*: Gazz. Chim. It. **63**, 247-50; 1933.
4. — HALVERSTADT I. F. and KUMLER W. D. — *Solvent polarisation error and its elimination in calculating dipole moments*: J. Am. Chem. Soc., **64**, 2988-92; 1942.
5. — HEDESTRAND G. — *Die Berechnung der Molekularpolarisation gelöster Stoffe bei unendlicher Verdünnung*: Z. f. Phys. Chemie, B **2**, 428-444; 1929.

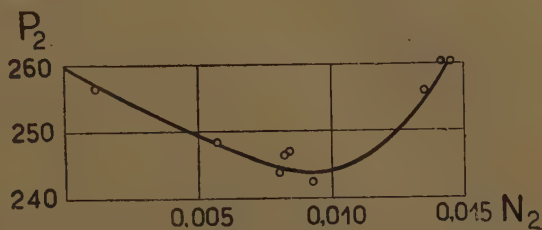


Fig. 1.



6. — ONSANGER L. — *Electric moments of molecules in liquids*: J. Am. Chem. Soc., **58**, 1486-93; 1936.
7. — KUMLER W. D. *The dipole moment and resonance in the tetronic acids*: J. Am. Chem. Soc., **62**, 3292-5; 1940.
8. — WILLIAMS J. W. and KIRCHMAN I. J. *The dielectric constants of binary mixtures. II. The electric moment of certain organic molecules in benzene solutions*: J. Am. Chem. Soc., **49**, 1676-86; 1927.
9. — WILLIAMS J. W. — *The dielectric constants of binary mixtures. VIII. The electric moment as a vector quantity*: J. Am. Chem. Soc., **50**, 2350-7; 1928.
10. — DAVIES M. — *Intramolecular hydrogen bridges and physiological activity*: Chemistry and Industry, 614-5; 1953.
11. — MECKE R., REUTER A. und SCHUPP R. L. *Dielektrische Präzisionsmessungen an Lösungen assoziierenden Stoffe. Dipolmoment und Assoziation*: Z. f. Naturforschung, **4a**, 182-91; 1949.  
 MECKE R. und REUTER A. — *Dielektrische Präzisionsmessungen an Lösungen assoziierenden Stoffe. V. Dipolmoment und Assoziation von Alkoholen und Substituierten Phenole*: Ibid., **4a**, 368-78; 1949.

ESTENSIONE DELLA ANALOGIA DI MOHR ALLE TRAVI SOTTILI  
CARICATE ASSIALMENTE

*Nota del Prof. Ing. Franco Mazzarella, presentata dal socio Adriano Galli*

(Adunanza del dì 6 giugno 1953)

**Sunto.** — Si espone un metodo per determinare la deformata di una trave sottile caricata assialmente e da forze trasversali, in analogia con il ben noto teorema di MOHR. Si accenna alla utilizzazione di tale metodo per la determinazione dei carichi critici

Un ben noto teorema di MOHR stabilisce che la linea elastica di una generica trave inflessa può ottenersi come diagramma del momento flettente lativo ad un'altra trave (detta generalmente trave ausiliaria), di lunghezza uguale a quella effettiva, su cui si considera agente un carico la cui intensità in ogni sezione è uguale al valore della curvatura della linea elastica della trave effettiva. Lo stesso teorema stabilisce come debba pensarsi vincolata la trave ausiliaria, a seconda delle condizioni di vincolo di quella effettiva ed è riconosciuto il vantaggio che si consegue applicandolo alla risoluzione di molti problemi relativi alle travi inflesse. Pertanto si è ritenuto utile far notare come tale analogia possa estendersi anche al caso di travi caricate assialmente.

Propriamente ci proponiamo di dimostrare come la linea elastica di trave a sezione trasversale costante il cui momento di inerzia sia  $I$  ed il cui modulo di elasticità  $E$ , sollecitata da uno sforzo normale, anche esso costante, di intensità  $N$ , nonchè da un generico sistema di carichi ripartiti o concentrati e vincolata in maniera qualsiasi possa ottenersi come diagramma di momento flettente di una trave ausiliaria di lunghezza uguale a quella effettiva, il cui asse geometrico è un arco di cerchio di raggio  $R$ , dato dalla relazione:

$$(1) \quad R^2 = \frac{EI}{N}$$

e sollecitata da un carico avente in ogni sezione direzione radiale e intensità uguale alla curvatura che si avrebbe nella trave effettiva qualora si prescindesse dal carico assiale.

Preciseremo in fine le relazioni che dovranno intercorrere tra i vincoli della trave effettiva e quelli da imporre alla trave ausiliaria.

Riferiremo la nostra trave ad una coppia di assi cartesiani la cui origine è nel baricentro di una delle sezioni terminali e l'asse  $x$  coincide con

l'asse geometrico della trave indeformata, preso positivo nel verso dell'altro estremo, indicheremo con  $v(x)$  l'ordinata della generica sezione di ascissa  $x$  della linea elastica e con  $\mathfrak{M}(x)$  il momento flettente determinato nella stessa sezione della trave dalle reazioni vincolari e dal carico trasversale cioè il momento flettente effettivo a meno del termine dovuto al carico assiale; con tale notazione ovviamente l'equazione differenziale della linea elastica è:

$$(2) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = - \frac{\mathfrak{M}(x)}{EI} - \frac{N}{EI} v$$

il cui integrale è:

$$(3) \quad v = v_0 \cos \frac{x}{R} + \gamma_0 R \operatorname{sen} \frac{x}{R} - R^2 \int_0^x \frac{\mathfrak{M}(z)}{EI} \operatorname{sen} \frac{x-z}{R} \frac{dz}{R}$$

da cui si ricava:

$$(3') \quad \gamma(x) = \gamma_0 \cos \frac{x}{R} - \frac{v_0}{R} \operatorname{sen} \frac{x}{R} - R^2 \int_0^x \frac{\mathfrak{M}(z)}{EI} \cos \frac{x-z}{R} \frac{dz}{R}$$

$$(3'') \quad v''(x) + \frac{\mathfrak{M}(x)}{EI} = - \frac{v_0}{R^2} \cos \frac{x}{R} - \frac{\gamma_0}{R} \operatorname{sen} \frac{x}{R} + \int_0^x \frac{\mathfrak{M}(z)}{EI} \operatorname{sen} \frac{x-z}{R} \frac{dz}{R}$$

dove evidentemente  $v_0$  e  $\gamma_0$  rappresentano l'abbassamento e l'inclinazione della linea elastica nella sezione iniziale.

Consideriamo ora una trave circolare di raggio  $R$ , di lunghezza  $l$ , uguale a quella della trave effettiva, sollecitata da un carico radiale  $p(x)$ . Riferiremo (vedi fig. 1) tale trave ad un sistema di coordinate polari a

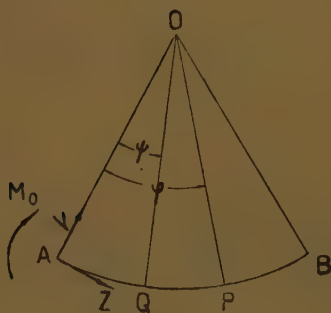


Fig. 1.

venti l'origine nel centro di curvatura dell'asse geometrico della trave stessa e l'asse polare coincidente con il raggio passante per A, centro della sezione iniziale della trave; indicheremo con P il centro della generica sezione e con  $\varphi$  l'angolo che il raggio OP forma con OA e con  $s$  la lunghezza dell'arco AP; per una ulteriore sezione il cui centro sia Q indicheremo con  $\phi$  l'angolo AOQ.

Indicheremo con  $V$  e  $Z$  le componenti della reazione del vincolo esercitato in A rispettivamente nella direzione dello sforzo di taglio e dello sforzo normale, con il verso positivo

indicato in figura, e con  $M_0$  l'eventuale momento di tale reazione.

Le caratteristiche di sollecitazione, momento flettente, sforzo di taglio e sforzo normale in una generica sezione della trave che stiamo esaminando evidentemente sono dati da:

$$\begin{aligned}
 M(\varphi) &= M_0 - ZR \cos \varphi + VR \sin \varphi - R^2 \int_0^\varphi p \sin(\varphi - \psi) d\psi \\
 (4) \quad T(\varphi) &= V \cos \varphi - Z \sin \varphi - R \int_0^\varphi p \cos(\varphi - \psi) d\psi - \\
 - \frac{N(\varphi)}{R} &= - \frac{V}{R} \sin \varphi - \frac{Z}{R} \cos \varphi + \int_0^\varphi p \sin(\varphi - \psi) d\psi
 \end{aligned}$$

Dal confronto delle formule (3) con le (4) appare immediatamente che se si pone in queste ultime

$$p = \frac{\mathfrak{M}}{EI}, \quad V = \gamma_0, \quad ZR = M_0 = v_0$$

l'abbassamento, l'inclinazione e  $v''(x)$  della linea elastica della trave effettiva coincidono ordinamente con momento flettente, sforzo di taglio e sforzo normale della corrispondente sezione della trave ausiliaria.

Possiamo perciò precisare « che la deformata di una trave soggetta a carichi trasversali ed a sforzo normale costante può ottenersi come diagramma di momento flettente di una trave ausiliaria avente la stessa lunghezza di quella effettiva, per asse geometrico un arco di cerchio di raggio  $R = \sqrt{EI/N}$ , ed alla quale è applicato un carico radiale di intensità  $\mathfrak{M}/EI$  e nella sezione iniziale uno sforzo di taglio  $T_0$  ed un momento  $M_0$  rispettivamente eguali alla inclinazione ed allo spostamento che ha la trave effettiva nella stessa sezione, ed uno sforzo normale  $N_0 = \gamma_0 \sqrt{EI}$  ».

Sicchè, se la trave effettiva è incastrata rigidamente in una sezione, la corrispondente della trave ausiliaria sarà libera; se è incernierata, essendo ivi nullo lo spostamento, per la trave ausiliaria sarà nullo il momento e lo sforzo normale e dovremo quindi pensare ad un vincolo di semplice appoggio.

Il procedimento ora esposto è senz'altro applicabile anche a travi di sezione variabile; cominciamo con l'esaminare il caso di travi costituite di più tronchi ciascuno di sezione costante.

Nella sezione di passaggio da un tronco all'altro, poichè varia la sezione della trave effettiva varierà la curvatura della trave ausiliaria, però



siccome la linea elastica della prima si mantiene continua tali resteranno i diagrammi del taglio e del momento flettente di quella ausiliaria, tenendo conto della relazione (3) si vede che in tale sezione si avrà una discontinuità,  $\Delta N$ , dello sforzo normale data da

$$\Delta N = y \sqrt{\frac{N}{E}} \left( \frac{1}{\sqrt{I_1}} - \frac{1}{\sqrt{I_2}} \right)$$

dove evidentemente  $y$  indica l'ordinata della linea elastica della trave effettiva nella sezione di passaggio da un tronco all'altro, ed  $I_1$  ed  $I_2$  i momenti d'inerzia delle sezioni trasversali dei due tronchi adiacenti sempre della trave effettiva; ciò vuol dire che nel costruire la funicolare dei carichi per aver avere il diagramma dei momenti flettenti bisognerà pensare agente in ogni sezione di passaggio da un tronco all'altro una forza assiale di intensità uguale alla discontinuità dello sforzo normale ora determinata.

Evidentemente tale procedimento è applicabile anche a travi la cui sezione varia con continuità, sempre che, con l'approssimazione accettata in tutti i processi grafici, si suddivida la trave in tronchi e si ritenga che per ciascuno di essi la sezione sia costante.

Con l'analogia ora esposta si può individuare anche il valore del carico critico della trave considerata in quanto sempre che per la trave ausiliaria si notano o sovrapposizioni di tronchi di trave o impossibilità di realizzare l'equilibrio si può desumere che la trave effettiva è in condizioni di carico critico. Così per una trave con due cerniere alle estremità sappiamo che la trave ausiliaria sarà vincolata con due appoggi; ora se essa si dispone secondo un arco della ampiezza di mezza circonferenza manifestamente non è possibile l'equilibrio sotto l'azione di carichi radiali e quindi ritroviamo il classico carico critico di EULERO. Analogamente per una trave con due incastri sollecitata da uno sforzo normale  $N = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$  pari al ca-

rico critico, si nota che lo sviluppo della trave ausiliaria sarebbe quello di una intera circonferenza, il che porterebbe alla compenetrazione della prima con l'ultima sezione.

## I VULCANI DELLA LUNA

*Nota del socio ordinario Giuseppe De Lorenzo*

(Pervenuta all' Accademia nel dì 24 agosto 1953)

**Sunto.** — Questa nota vuol essere un seguito di quella su *Kant e la Geografia fisica*, presentata all' Accademia il 6 giugno 1953; nella quale è genericamente esposta la grande opera, compiuta dal filosofo nel campo geografico fisico; mentre in questa si riferisce specificamente quel che egli scrisse nel suo lavoro sui vulcani nella luna, là semplicemente menzionato.

Nella mia nota su *Kant e la Geografia fisica*, presentata all' Accademia il 6 giugno 1953, ho cercato di esporre succintamente, alla meglio, la vasta e, in un certo senso, imperitura opera, compiuta da KANT nei più diversi campi dell' astronomia e della geografia fisica. In essa avevo anche accennato, che egli nel 1785 scrisse anche un lavoro sui vulcani nella Luna, senza ulteriormente fermarmi su esso. Ora vi ritorno, per mostrare, come anche su questo specifico argomento KANT abbia esposto pensieri, che ancor oggi, dopo più di un secolo e mezzo, possono concordare con i notevolissimi risultati ottenuti, mediante le ricerche telescopiche, telefotografiche e spettroscopiche, dalla moderna selenografia e selenologia.

Lo scritto di KANT *Ueber di Vulkane im Monde* apparve nel 1785 a Berlino, nel quinto volume della *Berlinische Monatschrift*. Fu poi ristampato nei *Kants kleine Schriften* a Neuwied nel 1793, nei *Kants zerstreute Aufsätze* a Frankfurt e Leipzig nel 1793, nei *Kants sämtliche kleine Schriften* a Königsberg e Leipzig nel 1797 e nei *Kants vermischten* a Halle nel 1799. Fu poi riprodotto in tutte le edizioni delle opere complete di KANT: a cominciare da quella, eccellente, curata da ROSENKRANZ e SCHUBERT e stampata dall' editore Voss a Leipzig nel 1838-1842, finendo con l' ultima, monumentale edizione del principio di questo secolo, curata dall' Accademia delle Scienze di Berlino e stampata a Berlino dall' editore Georg REIMER, *Kant's gesammelte Schriften, herausgegeben von der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften*.

Lo spunto allo scritto sui vulcani nella Luna fu dato a KANT da una lettera, stampata in *The Gentlemans Magazine* di Londra, dell' agosto 1784, a firma *Aepinus* (pseudonimo del fisico russotedesco Theodor HOCH), diretta al naturalista PALLAS; nella quale si affermava, a proposito della scoperta, fatta da HERSCHEL il 1 maggio del 1783, di un vulcano nella Luna, che già egli nel 1778, e contemporaneamente il fisico italiano Giacomo

Battista BECCARIA e lo spagnuolo don Antonio de ULLOA, che aveva preso parte alla misura del grado nel Perù, avevano supposto l'origine vulcanica delle ineguaglianze della superficie lunare; che trovava confronto e conferma nelle illustrazioni della monumentale opera di lord HAMILTON, *Campi Phlegraei*, Napoli, 1776, e nelle descrizioni del Vesuvio del Padre Giovanni Maria della TORRE. Del resto, aggiungeva lo *Aepinus*, il primo formulatore di tale ipotesi sui vulcani della Luna era stato il famoso Robert HOOKE (1635-1703) nella sua *Micrographia or some physiological descriptions of minute bodies*, del 1665. E così, conchiude filosoficamente KANT, *sic redit ad Dominum* la priorità della scoperta dei vulcani nella Luna.

Il considerare lo HOOKE quale *dominus* della scoperta dei vulcani nella Luna mi induce ad una digressione sulla priorità dello stesso HOOKE nella scoperta, ben più importante, della legge di gravitazione universale, da lui formulata in *An attempt to prove the motion of the earth from observations*, London 1674, e da lui anche forse desunta dall'opera del nostro BORELLI, *Theoria motus planetarum a causis physicis deducta*, pubblicata a Firenze nel 1666: così che, quando NEWTON nel 1686 l'espose nei suoi *Principia*, lo HOOKE protestò innanzi alla Royal Society per la priorità della sua concezione; e NEWTON dovette prenderne atto nell'edizione completa dei suoi *Principia*, del 1687, con le parole: *ut seorsum collegerunt etiam nostrates Wrennus, Hookius et Hallaeus*. Ma, se il primo pensiero di tale concezione risale a HOOKE e BORELLI, il merito di averla chiaramente formulata e matematicamente dimostrata spetta interamente a NEWTON. Così che si può dire, che a HOOKE è avvenuto, per la scoperta dei vulcani nella Luna e della legge della gravitazione universale, qualche cosa di simile a quel che è avvenuto a COLOMBO per la scoperta dall'America. COLOMBO, partendo dal giusto principio della sfericità della Terra, compì il suo memorabile viaggio, ma non si convinse mai, fino alla sua morte, di aver scoperto un nuovo mondo; che doveva poi essere rivelato da Amerigo VESPUCCI, da cui prese il nome, e da MAGELLANO, che ne fece il periplo effettivo. E così NEWTON, partendo dalla teoria di COPERNICO e dalle tre leggi di KEPLERO e servendosi della sua alta analisi matematica, formulò nel modo più preciso e conciso la legge della gravitazione universale, secondo cui tutti i corpi, terrestri e celesti, minimi e massimi, si attraggono in ragione diretta delle masse ed in ragione inversa del quadrato delle distanze.

Per comprendere appieno il valore di tale legge e stimarne tutta la grandezza, scrive giustamente lo SCHOPENHAUER, nel capitolo sulla filosofia e la scienza della natura, nel secondo volume dei suoi *Parerga und Paralipomena*, basta confrontarla con i rozzi tentativi dei precedenti millenni per spiegare i moti dei corpi celesti: a cominciare dalle fantasiose armonie celesti di PITAGORA e dalle sfere concentriche, mosse dal primo mobile,

πρωτον κινουν, di ARISTOTELE, e dai cieli ed epicieli di TOLEMEO, fino alle intelligenze degli scolastici medievali; le quali non erano poi altro che gli angeli, arcangeli, cherubini e serafini: quali poeticamente li esprime il genio di DANTE, sia nel *Convivio*, II, 2: « Voi che intendendo il terzo ciel movete . . . intendo certe Intelligenze, ovvero per più usato modo volemo dire Angeli »; sia nel canto ottavo del *Paradiso*:

Noi ci volgiam coi Principi celesti  
D'un giro e d'un girare e d'una sete,  
Ai quali tu del mondo già dicesti:  
Voi che intendendo il terzo ciel movete.

Ed anche quando COPERNICO aveva spazzato via tali concetti scolastici medievali, spiriti liberi, quali quelli di Giordano BRUNO e di VANINI, non seppero far di meglio, che concepire i corpi celesti come esseri divini viventi e semoventi.

E poi venne CARTESIO, che, volendo spiegare tutto meccanicamente, non seppe concepire altra forza che l'urto e la spinta dei suoi vortici. Come infantile e grossolano è tutto ciò, esclama con ragione SCHOPENHAUER, e come, a suo confronto, deve ammirarsi la legge della gravitazione universale, che ha dimostrato così innegabilmente le cause motrici e la forza in esse attiva, con tale sicurezza ed esattezza, che anche la più lieve deviazione e perturbazione, accelerazione o ritardo del moto dei corpi celesti, può, mediante essa, venire esattamente calcolato. A buon diritto, quindi, KANT, nel concepire e comporre la sua Storia naturale generale e teoria del cielo, metteva a base di essa la legge di NEWTON della gravitazione universale: *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels, oder Versuch von der Verfassung und dem mechanischen Ursprunge des ganzen Weltgebäudes, nach Newton'schen Grundsätzen abgehandelt*; da cui poi, quarant'anni dopo, nel 1796, LAPLACE doveva trarre la meccanica celeste della sua *Exposition du système du monde*.

Da questa digressione ritorno al tema principale di questa mia Nota, riguardante lo scritto di KANT sui vulcani nella Luna; in cui il filosofo espone concetti, che generalmente concordano con i risultati delle moderne osservazioni e ricerche selenologiche e selenogeniche. Egli, infatti, comincia con l'opporli all'opinione di *Aepinus*, che considerava come soltanto di origine vulcanica tutte le ineguaglianze della faccia della Luna, rivolta a noi. La scoperta di HERSCHEL, scrive KANT, ha certamente un grande valore e porta a simiglianze della Luna, e probabilmente anche di altri corpi celesti, con la nostra Terra, che altrimenti potrebbero apparire solo arrischiate ipotesi. Ma l'ipotesi del signor *Aepinus* non ne è una conferma: perchè, malgrado tutta la simiglianza delle grandi macchie lunari circolari con crateri di vulcani, vi è però una così notevole differenza da un lato, e d'altro lato tanta simiglianza con formazioni circolari di catene



di montagne non vulcaniche e di aree continentali della nostra Terra, che l'analogia di tali forme dei corpi celesti può avere anche un'altra spiegazione. Come infatti sul nostro pianeta si sono formate le aree continentali, con movimenti, che ora chiamiamo epeirogenici, e si sono corrugate, con moti orogenici, le catene delle montagne; e le une e le altre sono state modellate dalle forze dell'acqua e dell'aria; sì che tutte le forze telluriche della pirofera, della litosfera, dell'idrosfera e dell'atmosfera hanno egualmente concorso al modellamento della superficie della Terra: così egualmente le analoghe forze del nostro satellite hanno concorso a formare le grandi macchie, dette *mari*, ed i grandi *circhi* della Luna. Ed in ultimo, dice KANT, quando s'era già formata e consolidata la litosfera, sono venute le eruzioni vulcaniche, che non hanno alterato la configurazione generale della crosta; di cui i coni ed i crateri vulcanici rappresentano sole piccole escrescenze.

Questa concezione geologica e selenologica di KANT porta quindi alla conclusione, che tutte le forme della superficie del nostro pianeta e del nostro satellite, siano esse epeirogeniche, orogeniche od eruttive, sono tutte dovute alle azioni delle forze insite in essi, senza alcuna notevole azione esteriore. Ed anche la scoperta di HERSCHEL, di un vulcano nella Luna, conclude KANT, è di grande importanza cosmogonica; perchè ci mostra, che tutti i corpi celesti hanno avuto una stessa origine ed un analogo sviluppo: da masse incandescenti, prima gassose, poi fluide, quindi solidificate alla superficie, con moti e scambi di forze e di fenomeni, interiori ed esteriori, ma sempre autogeni, e con le successive produzioni di miriadi di forme inorganiche ed organiche.

Questi concetti di KANT concordano, come ho già detto, con la maggior parte dei risultati delle moderne ricerche selenologiche. Ma non con tutte. Non concordano affatto, per esempio, con la modernissima, ed ora di grande moda come ogni novità, ipotesi o *teoria meteoritica*; la quale attribuisce all'urto di meteoriti o bolidi, provenienti dagli spazi interplanetari, l'origine dei trentacinquemila e più crateri, o cosiddetti crateri, dai quali è crivellata la faccia della Luna rivolta verso la Terra. Questa disparità e mutevolezza delle opinioni degli uomini: non solo sulle stesse cose loro, ma anche su quelle dell'universo, fu già satiricamente esposta, circa due-mila anni fa, da LUCIANO, nei suoi *Dialoghi*; che noi possiamo con profitto ancora leggere nella bella traduzione del nostro Luigi SETTEMBRINI. Nel dialogo *Icaromenippo*, il curioso investigatore *Menippo* è turbato dalle diverse opinioni degli uomini, di cui alcuni « affermano di aver misurato il sole, aver camminato per gli spazi, che sono stati sopra la luna e, come se fosser caduti dagli astri, ne descrivono le grandezze e le figure, ed osan dire quanto è distante la luna dal sole, e quanto l'una e l'altro son grandi, che altezza ha l'aria, che profondità il mare, misurano e dividono la circonferenza della terra; e poi, descrivendo cerchi. disegnando triangoli,

quadrati e sfere, danno a credere che misurano il cielo. Quel che prova la loro superba ignoranza è che ragionano di queste cose oscure non per congettura, ma con osservanza, e s' incaponiscono, e non soffrono che altri ne dubiti . . . Intorno a questo mondo ciascun di essi ha l'opinione sua: chi vuole che sia increato ed indistruttibile; chi dice che ha avuto un Creatore, e pretende di sapere anche come è stato creato; altri parlano di un certo Iddio, artefice di tutte le cose, ma non dicono donde era venuto e dove egli stava, quando fabbricava il mondo: perchè prima che fosse la terra e l'universo è impossibile concepire tempo e luogo . . . E che dire poi sulle loro pappolate su le *idee*, e le cose *incorporee*, le loro saccenterie sul *finito* e sull'*infinito*? Chè sempre fresco è il battagliaire di questo tra coloro che mettono un termine all'universo, e coloro, che suppongono, che ei non finirà mai. Alcuni ancora vogliono dimostrare, che i mondi sono moltissimi, e sfatano chi sostiene che ve n'è uno . . . Tra tutti questi dubbi, disperando di poter sapere la verità sulla terra, mi persuasi, che una sola via vi sarebbe per uscire di quell'affanno, se io stesso volando andassi in cielo ». E così, come noi oggi vagheggiamo, di volare con i proiettili a razzo verso la Luna e Marte, *Menippo* con ali di Icaro volò sulla Luna, dove trovò EMPEDOCLE; che gli insegnò a guardare di là la Terra, su cui vide questo: « Certo hai veduto talvolta un mucchio di formiche: quali entrano, quali escono, quali vanno attorno il formicaio; una caccia fuori le lordure, un'altra, afferrato un guscio di fava o un mezzo granello corre portandolo in bocca; e pare che anche tra esse ci sieno ed architetti, e capipopoli, e magistrati, e musicisti, e filosofi. Le città, adunque, con gli uomini, mi parevano formicai ». Da alcune di queste formiche umane, più sapute, sono escogitate le concezioni sulle forme ed i fenomeni dell'universo, e tra esse si deve annoverare anche quella, cui dianzi ho accennato, ed ora di voga, della teoria meteoritica dell'origine dei crateri della Luna.

Questa teoria meteoritica, escogitata da R. A. PROCTOR nel 1873, convalidata e sostenuta da GILBERT nel 1892, da SHALER nel 1903 e da SEE nel 1910, ed esposta largamente da GIFFORD nel lavoro su *The origin of the Surface Features of the Moon*, in *Scientia* del 1930, si appoggia principalmente sulle due cavità crateriformi del Cañon Diablo, nell'Arizona, del diametro di 1500 metri e della profondità di 150 metri, e di Ungava, presso Québec, nel Canada, del diametro di 4000 metri e della profondità di 20 metri: supposte come prodotte dall'urto di meteoriti, alcune centinaia o migliaia di anni or sono. Di grandi meteoriti, o bolidi, caduti sulla Terra, con effetti vistosi, abbiamo solo cognizione di quello caduto a Tunguska nella Siberia, il 30 giugno 1908, che fece tremare la crosta terrestre e devastò il suolo, dov'era caduto, e dell'altro, piombato a Novoprovokka, presso Vladivostock, il 12 febbraio 1947, producendo buche di un centinaio di metri di diametro e di una decina di metri di profon-

dità per un raggio di un migliaio di metri. E da così scarsi e limitati fenomeni quegli astronomi e geologi americani hanno dedotto, che migliaia e migliaia di simili bolidi, precipitando sulla Luna, hanno prodotto sulla sua superficie le decine di migliaia di crateri e cavità crateriformi: da quelli più piccoli, simili ai crateri eruttivi terrestri, fino ai grandissimi, di più di 150 chilometri di diametro! E non si son chiesti, come mai la Terra, che ha una massa 81 volte maggiore di quella della Luna e dista da essa appena 60 raggi equatoriali terrestri, abbia fatto passare vicino a sè, senza attrarli, tutti quegli sciami meteoritici, lasciandoli tutti precipitare sulla Luna; che ha una massa tanto più piccola e quindi tanta minore forza d'attrazione! È proprio il caso, di sentirsi turbati come l'*Icaromenippo* di LUCIANO, innanzi a questo straordinario bombardamento celeste, che avrebbe ridotto la Luna ad una specie di forma di cacio di Emmenthal o di Gruyère; mentre sarebbe più semplice pensare, che, come in tali formaggi sono i gas di fermentazione, che producono quei buchi; come altri gas producono le bolle e le cavità superficiali dei metalli fusi, quando si raffreddano: così i gas ed i vapori dell'interno della Luna, esplodendo, hanno prodotto le cavità crateriformi della sua superficie. Si può infatti pensare, che la luna rappresenti, rispetto alla Terra, un molto ulteriore stadio di evoluzione; nel quale l'acqua e gli altri gas, in parte sperdutisi negli spazi interplanetari, ma in parte ancor esistenti nell'interno caldo e fluido, abbiano finito con l'esplodere attraverso la crosta, già fredda ed irrigidita, della Luna, producendo le sue migliaia e decine di migliaia di crateri, come gli ultimi suoi atti vitali; dopo di che forse ad essa non resterebbe che l'incontro con qualche altro corpo celeste, il quale la rompesse in frantumi, rimettendo questi nella circolazione cosmica originaria, dalla quale essa, come la Terra, ebbe principio.

Fortunatamente non tutti gli scienziati attuali si sono invaghiti dell'ultima moda della teoria meteoritica, e moltissimi, forse i più di essi, concordano ancora con la concezione di KANT, che distingueva nella Luna i cosiddetti *mari* ed i grandi *circhi*, dovuti, come sulla terra i continenti e le catene di montagne, a movimenti intrinseci della crosta, e *crateri* propriamente detti, prodotti da effettive forze eruttive, analoghe a quelle, che hanno dato e danno origine ai vulcani della Terra. Specialmente in Italia gli studiosi di astrofisica si attengono generalmente, ad eccezione di qualche entusiasta della moda meteoritica, a tale antica concezione. Così, per esempio, il padre Angelo SECCHI, nel suo *Quadro fisico del sistema solare*, Roma, 1859, attribuì ai *mari* ed ai *circhi* lunari una comune origine eruttiva: opinione accettata poi anche da SCHINDLER ne *La mécanique de la Lune*, Lucerna, 1905. Non mi fermo sull'*Essai schématique de Sélénologie*, Torino, 1907, del compianto collega geologo Federico SAGCO, ed indico il bel volume di Alfonso FRESA, *La Luna*, edito a Milano da HOEPLI nel 1933; al quale Giorgio ABETTI con la sua prefazione conferisce,



con la sua alta competenza, un suggello di grande serietà scientifica. Il FRESA, a pag. 213 del suo libro, scrive appunto: « L'idea, che le innumerevoli buche dei crateri fossero davvero vulcani, si presentò alla mente fin dai primi tempi delle osservazioni telescopiche. L'analogia era così evidente, che nessun dubbio in proposito si affacciò; e quantunque attualmente d'oltre Oceano si sia prospettata una nuova teoria (meteoritica), quella vulcanica rimane ancora difesa da una quantità di scienziati ». E, in appoggio di tale affermazione, il FRESA giustamente cita le diligenti osservazioni di Gabriella e Giuseppe ARMELLINI, eseguite nell'Osservatorio del Campidoglio e pubblicate nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei del 1924, *Sopra l'albedine visuale dei mari lunari*; che sembrano confermare l'opinione di NEWCOMB ed ENGELMANN, esposta in *Die Kultur der Gegenwart, Astronomie*, Leipzig, Teubner, 1924; secondo cui i mari della Luna sarebbero grandi conche di lave basaltiche, pesanti, mentre i rilievi sarebbero costituiti da lave prevalentemente riolitiche e trachitiche, più leggiere. Il che confermerebbe l'origine eruttiva di molti dei rilievi e dei crateri lunari. *Last not least*, Gino CECCHINI nella sua grande opera *Il Cielo*, Torino, U. T. E. T., 1952, così si esprime sull'origine dei crateri della Luna, vol. I, pp. 266-268: « Un'altra teoria ha cercato di opporsi alla *teoria vulcanica*, che, come si è visto, spiegherebbe l'origine dei crateri e delle altre formazioni lunari con *forze interne*, ed è la *teoria meteoritica*, secondo la quale i crateri sarebbero il risultato di un bombardamento di meteoriti, cioè l'effetto di *forze esterne*. Crateri vulcanici sono ammissibili, ma non sembra possibile ammettere per questa via la formazione degli innumerevoli circhi montuosi, così grandi come quelli che si osservano nella Luna. La questione, quindi, è tutt'altra che risolta a favore di questa teoria meteoritica, e probabilmente ambedue le ipotesi debbono tenersi presenti, pur dando la precedenza alla teoria vulcanica, cioè all'intervento di *forze interne*. Nulla si oppone, invece, a che le montagne lunari abbiano avuto la stessa origine dalle stesse forze, che hanno determinato la formazione delle montagne terrestri. In sostanza, è plausibile che la Luna sia all'incirca come doveva essere la Terra prima di essere coperta dalle rocce sedimentarie, che nascondono oggi le formazioni, che, in analogia a quelle esistenti nella Luna, ci attenderemmo di scorgere ». Ma, questo è appunto quel che pensava KANT, quando, nel suo lavoro *Ueber die Vulkane im Monde*, distingueva i grandi rilievi e sistemi di montagne della Luna dai suoi minori crateri, paragonandoli rispettivamente alle analoghe forme della Terra ed attribuendone l'origine, come per queste, alle *interne forze* del pianeta e del satellite; che hanno comuni, alla pari di tutti gli altri corpi dell'universo, l'origine e la materia, la quale non è se non forza e causalità; e finiva quindi col dichiarare, che così si poteva ottenere un generale principio di derivazione e di spiegazione per i crateri della Luna, i vulcani della Terra e le macchie del Sole:



« Endlich würden die vulkanischen Eruptionen aus der Erde, dem Monde und sogar der Sonne ein allgemeines Princip der Ableitung und Erklärung bekommen ».

Circa settanta anni dopo che KANT aveva scritto ciò, SCHOPENHAUER, che ne fu il più diretto e fedele discepolo spirituale, nel su citato suo capitolo sulla filosofia e la scienza della natura, del secondo volume dei suoi *Parerga und Paralipomena*, volle esprimere nei termini della sua metafisica gli ultimi risultati della Geologia. Egli aveva identificato l'inconoscibile, metafisica cosa in sè, *Ding an sich*, di KANT, con il conoscibile *Wille*, o volontà di vita; che è identico alla *sitis vitae* di LUCREZIO ed alla *tanh'i*, o sete dell'essere o del divenire, del Buddha SAKYAMUNI: che anima noi e tutto l'universo ed è la fonte di tutte le forme e di tutti i fenomeni del mondo; dalle più primitive forze fisiche e chimiche, inorganiche ed organiche, fino alle ultime vibrazioni psichiche umane. Egli, quindi, si compiacque, di immaginare i primordii dell'esistenza della Terra, quando le forze fisiche e chimiche, inorganiche, già differenziate, investivano tutta la massa del pianeta, con manifestazioni simili a quelle, che ora si svolgono, in maggiori proporzioni, nel Sole; e poi il passaggio graduale dalla pirofera alla litosfera, all'idrosfera ed all'atmosfera; e quindi l'inizio della vita organica, vegetale ed animale, con successive, sempre più complicate manifestazioni di forme, attraverso gli eoni delle ere geologiche, fino ad apparire, negli ultimi loro periodi, delle forme pitecoidi, pitecantropoidi ed umane. Ed è interessante, prosegue SCHOPENHAUER, immaginare, come i pianeti, che girano nello spazio infinito, intorno agli innumerabili soli, e che siano ancora le sedi delle conflagrazioni delle forze fisiche e chimiche, apparecchiano già le sedi per lo svolgimento delle forze organiche. Anzi, non si può fare a meno di pensare, che è lo stesso agente, il quale infuria in quei flutti di fuoco e di acqua, come ancora se ne vedono le manifestazioni sulla Terra, che anima la flora e la fauna e le azioni e i pensieri degli uomini. Ma il raggiungimento dell'umanità dovrebbe anche essere l'ultimo gradino dell'evoluzione dell'universo: perchè nell'uomo appare la possibilità, sotto la forma dell'ascetismo e della santità, del rinnegamento della volontà di vivere e della rinuncia al mondo, per cui tutta la *divina commedia* viene a finire. Ed è quindi il *morale* quel che è il nucleo del mondo: come già KANT aveva intuito, e SCHOPENHAUER dimostrato; e come i più grandi pensatori ed illuminatori del mondo hanno messo a base delle loro filosofie e delle loro religioni.

Ma questo quadro della vita del mondo, così abbozzato da SCHOPENHAUER con i colori, fornitigli dalle moderne scienze astronomiche e geologiche, era stato già dipinto, con pennellate michelangiolesche, nel sesto secolo avanti CRISTO, dal Buddha SAKYAMUNI in molti suoi discorsi; come in questo, per esempio, del *Samyuttakanikāyo*: « Senza principio e senza fine, o mendicanti, è questo giro dell'universo (*samsāro*), inconoscibile è

il principio degli esseri inscienti, che, animati dalla sete del divenire (*tanhâ*), passano perpetuamente dalla vita alla morte e dalla morte alla vita. Viene un tempo, o discepoli, in cui l'oceano si dissecca, sparisce e svanisce; ma non finisce il dolore degli esseri inscienti, che, divorati dalla sete del divenire, si affrettano pel giro delle rigenerazioni. Viene anche un tempo, in cui le grandi montagne si consumano, svaniscono e finiscono; viene anche un tempo, in cui la stessa grande Terra si consuma, si sperde, svanisce e finisce; ma non finisce il dolore degli esseri inscienti che, divorati dalla sete del divenire, si affrettano pel giro infinito delle rigenerazioni. E perchè ciò? Perchè senza principio nè fine è questo giro dell'universo, inconoscibile è il principio degli esseri inscienti, che, divorati dalla sete del divenire, passano da vita a morte, da morte a vita, soffrendo strazio e dolore: abbastanza lungamente, invero, per essere insoddisfatti di ogni forma di esistenza, per potersene redimere, per potersene salvare ».

Questa salvazione, o cessazione totale ed estinzione morale, *nirvâna*, della sete o fiamma della vita: questa, e non la semplice *mors* materiale, cui pensava ORAZIO, veramente *ultima linea rerum est*.

ESAME MICROSCOPICO DI REFRATTARI CROMO-MAGNESIACI, IN SEZIONE  
SOTTILE E IN SEZIONE LUCIDA

*Nota del dr. Riccardo Sersale, presentata dal socio G. Malquori*

(Adunanza del dì 7 novembre 1953)

**Sunto.** — L'A. esamina la costituzione mineralogica di taluni campioni di refrattario cromo-magnesiaco, traendone deduzioni di interesse tecnico.

I refrattari cromo-magnesiaci constano di uno scheletro di frammenti di cromite — che è uno spinello complesso:  $(\text{Fe}, \text{Mg})\text{O}(\text{Cr}, \text{Al}, \text{Fe})_2\text{O}_3$  — e di una matrice costituita essenzialmente da forsterite:  $2\text{MgO} \cdot \text{SiO}_2$ , insieme con periclasio:  $\text{MgO}$ , monticellite:  $\text{CaO} \cdot \text{MgO} \cdot \text{SiO}_2$ , spinello eminentemente magnesiaco.

Essi si ottengono appunto legando — anche a freddo, servendosi di piccole quantità di cemento magnesiaco ad ossisale (tipo Sorel) — il suddetto scheletro di granelli di cromite, con magnesia finemente polverizzata.

È nota l'importanza che per queste destinazioni assume la qualità della cromite, e come si desideri di poter disporre di una materia prima con il meno possibile di inclusioni o ganghe serpentinosi.

Perchè per il rapporto:  $\text{MgO}/\text{SiO}_2$  secondo il quale questi due componenti son contenuti nel serpentino, l'inizio della formazione di liquido avviene a  $1562^\circ$ , in corrispondenza dell'eutettico: forsterite — clinoenstatite<sup>1)</sup>, inizio che risulterà in pratica ulteriormente abbassato per la presenza di costituenti accessori.

Occorre quindi evitare che nello scheletro siano contenuti, almeno in percentuale cospicua, dei frammenti di serpentino proveniente dalla ganga della cromite, come pure l'impiego di cromiti troppe ricche di inclusioni serpentinosi inframmezzate intimamente e minutamente nel minerale di base.

È desiderabile invece che codesta ganga serpentinosi sia presente nel finissimo insieme con la magnesia, perchè, in cottura, la magnesia si addiziona al serpentino disidratato tendendo al rapporto molecolare:  $\text{MgO}/\text{SiO}_2 = 2$ . Per tanto detta magnesia ridurrà la quantità di liquido che prende origine a  $1562^\circ$ , sia che essa si combini con il metasilicato prima di quella temperatura, sia che reagisca con il liquido formando forsterite (p. f.  $1910^\circ$ ).

<sup>1)</sup> ANDERSEN, O., e BOWEN N. L., Zeit. anorg. allg. Chem. **87**; 283; (1914).

Ne consegue che i buoni refrattari cromo-magnesiaci, dopo trattamento termico, debbano risultare costituiti da frammenti di cromite legati in una matrice eminentemente forsteritica.

L'assortimento delle differenti graniture deve essere scelto in modo da conseguire la massima compattezza.

\*\*\*

Avendo avuto occasione di studiare la struttura di taluni campioni di mattoni cromo-magnesiaci preparati a freddo con forte pressione e mediante l'aiuto di piccole quantità di legante all'ossicloruro, ritengo utile di dar conto dei risultati ottenuti e di richiamare l'attenzione su delle particolarità che ho potuto rilevare <sup>1)</sup>.

Le indagini ottiche sono state eseguite sia per trasparenza sia per riflessione.

a) — *Materiali ottenuti per semplice formatura a pressione, a freddo.*

In sezione sottile, in luce ordinaria sono visibili grossi inclusi di serpentino nei frammenti di cromite (fig. 1 tav. I) nonchè dei grossi frammenti isolati di serpentino (fig. 2). Anche nella sezione lucida della fig. 3 è visibile un frammento di serpentino di notevoli dimensioni.

E' visibile altresì, nel materiale crudo e pressato, la magnesia aggiunta al fine per costituire la matrice.

Come ho detto più sopra, mentre è necessaria nella suddetta matrice la presenza del serpentino, nello scheletro del refrattario cromo-magnesiaco essa è da evitarsi.

<sup>1)</sup> Riporto la composizione chimica del materiale ottenuto per formatura a pressione, a freddo:

	%
perdita al fuoco . . . . .	5,68
SiO <sub>2</sub> . . . . .	5,32
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> +TiO <sub>2</sub> . . . . .	9,50
Ferro (come Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ) . . . . .	12,10
Cr <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . .	29,00
CaO . . . . .	0,60
MgO . . . . .	37,55
non dosato . . . . .	0,25
	100,00



b) — *Materiali cotti.*

Gli stessi materiali, cotti intorno a  $1400^{\circ} \div 1450^{\circ}$ , mostrano: (fig. 4,5,6, tav. II) i frammenti di cromite stretti dalla matrice forsteritica, che è ben visibile per la sua birifrangenza nell'esame in luce polarizzata della sezione sottile di cui alla fig. 4.

La tessitura del refrattario cotto è visibile nella fig. 5 che riproduce una sezione lucida. Si noti il legamento fra i frammenti di cromite (i più riflettenti) e la matrice o cemento.

Nella fig. 6 invece è da osservare come la matrice mostri, in talune zone, la struttura reticolare del periclasio con le caratteristiche segregazioni di ferrito di magnesio.

L'esame microscopico in sezione sottile e in sezione lucida, permettendo di stabilire rapidamente la natura e la distribuzione dei principali costituenti del refrattario cromo-magnesiaco, fornisce utilissime indicazioni per il controllo ed il miglioramento della produzione di quei materiali.

*Napoli, Istituto di Chimica Industriale dell' Università.*



Fig. 1. — Nicols //; ingrandimento: x 40 (ridotto a x 34) —  
Frammenti di cromite con inclusioni di serpentino.

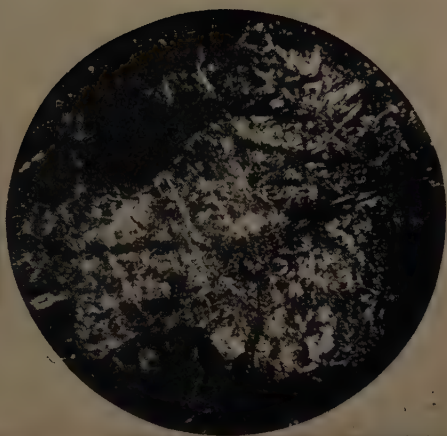


Fig. 2. — Nicols X; ingrandimento: x 40 (ridotto a x 34) —  
Frammento di serpentino nella miscela generatrice del refrattario.

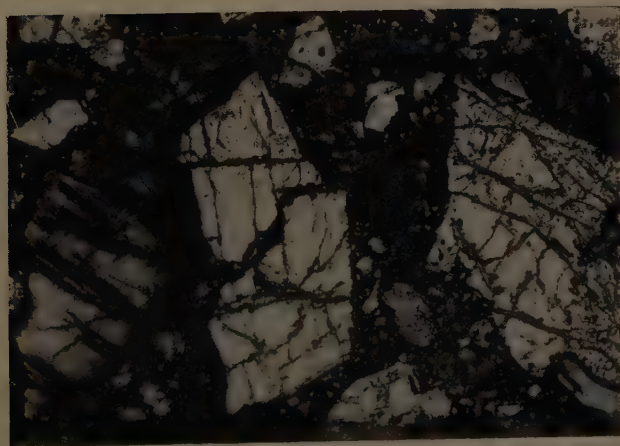


Fig. 3. — Luce riflessa; ingrandimento: x 30 ridotto a x 25. —  
Frammenti di cromite (chiari) e frammento di serpentino (grigio) nel refrattario crudo.



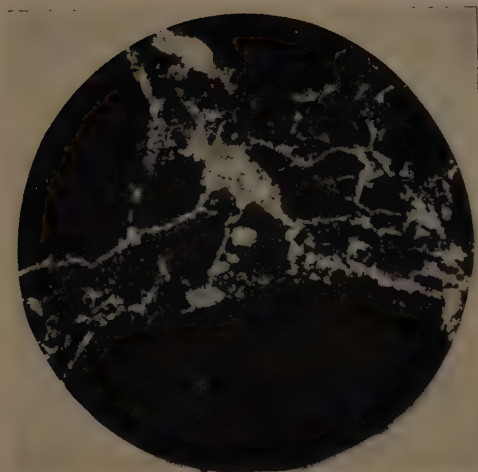


Fig. 4. — Nicols X; ingrandimento:  $\times 40$  (ridotto a  $\times 35$ ) —  
Frammenti di cromite, legati da forsterite.

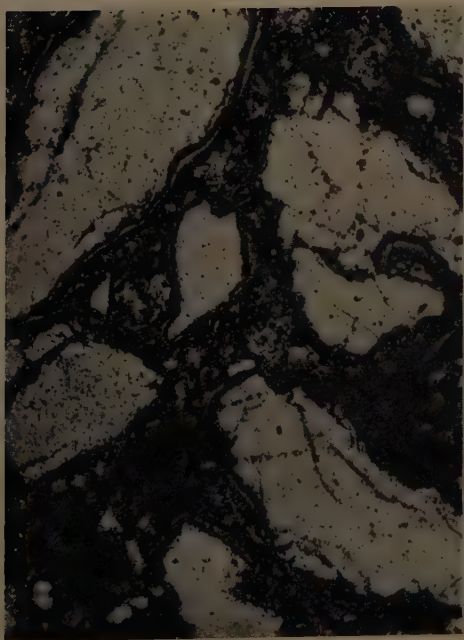


Fig. 5. — Luce riflessa; ingrandimento:  $\times 30$  (ridotto a  $\times 27$ ) —  
Materiale cotto.



Fig. 6. — Luce riflessa; ingrandimento:  $\times 420$  (ridotto a  $\times 375$ ) —  
Periclase nella matrice che ingloba frammenti cromitici.





## IL CARICO DI PUNTA CRITICO IN REGIME ELASTOPLASTICO

*Nota del prof. Vincenzo Franciosi, presentata dal socio Adriano Galli*

(Adunanza del dì 7 novembre 1953)

**Sunto.** — Si dimostra in rigore che il carico di punta critico in regime elasto-plastico deve essere ricercato con la formula di ENGESSER piuttosto che con quella di V. KÁRMÁN. Quanto sopra è in pieno accordo con i risultati ottenuti dallo SHANLEY studiando uno schema ideale di trave.

1. *Premessa.* Lo SHANLEY, in una fondamentale ricerca <sup>1)</sup>, ha fornito l'espressione del carico critico per una struttura elementare costituita da due bracci rigidi uguali; disposti sullo stesso asse e collegati da due elementi elastici, sollecitati assialmente. La definizione euleriana di carico critico è fondata sulla invariabilità di quest'ultimo durante il fenomeno dello svergolamento; lo SHANLEY, rimuovendo questa limitazione, e ponendosi quindi da un punto di vista indubbiamente più generale, ammette invece che la sollecitazione esterna possa incrementarsi durante lo svergolamento. Risulta così che questo ha inizio per un valore del carico coincidente con quello di ENGESSER, e ha termine (se il modulo tangente  $E_s$  è costante) per un valore del carico pari a quello di V. Kármán. Lo SHANLEY estende le sue conclusioni alle travi reali estrapolando, per così dire, i risultati ottenuti nello studio della struttura elementare anzidetta; alle stesse conclusioni si può giungere però, in rigore, attraverso il concetto di punto di diramazione (POINCARÉ) <sup>2)</sup>, ed è quanto si espone in questa nota.

2. — *L'equazione per la ricerca del carico di punta critico in regime elastoplastico.*

Si prenda in esame una trave ad asse rettilineo, di sezione costante, sollecitata assialmente da una forza  $P$ . Sia  $P_a$  il valore di  $P$  sotto cui ha

<sup>1)</sup> F. R. SHANLEY. *The Column Paradox*. Journal of Aeronautical Sciences. Dic. 1946. — *Inelastic Column Theory*. Journal of Aer. Sc., Maggio 1947. — *Applied Column Theory*. Proceedings of American Society of Civil Engineers. Giugno 1949.

<sup>2)</sup> A. E. H. LOVE. *A treatise of mathematical theory of elasticity*. Pag. 409. Cambridge, 1936.

inizio l'inflessione laterale. Contemporaneamente a questa si verifichi un aumento della forza  $P$ ; tale aumento, in un generico stadio dell'inflessione, sia  $\Delta P$ . Le tensioni, che all'inizio dell'inflessione sono fornite da  $\sigma = P_d/A$ , dove  $A$  è l'area della sezione retta, subiscono delle variazioni  $\sigma'$ ; queste tensioni supplementari dipendono dalle corrispondenti deformazioni secondo le due leggi  $\sigma = E_S \epsilon$  o  $\sigma' = E \epsilon$ , valide rispettivamente per variazioni in aumento o in diminuzione del valore iniziale  $P_d/A$ . Le tensioni  $\sigma'$  in un certo stadio dell'inflessione danno luogo ad uno sforzo assiale  $\Delta P$  costante e

ad un momento flettente  $M$  variabile lungo l'asse. Se, con riferimento ad una generica sezione  $S$  (Fig. 1), è  $h_1$  la distanza della traccia  $H$  dell'asse neutro dal bordo in cui la  $\sigma$  iniziale risulta diminuita, si può scrivere, nell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane

$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{h_2}{h_1} \frac{E_S}{E} = \sigma_1 \frac{h_2}{h_1 k}$$

dove  $\sigma_2$  è la massima  $\sigma'$  di compressione,  $\sigma_1$  la massima  $\sigma'$  di trazione, e  $k$  il rapporto  $E/E_S$  fra il modulo di Joung  $E$  e il modulo tangente  $E_S$ .

Se la sezione è rettangolare di larghezza  $b$ , si ha

$$\Delta P = \frac{b}{2} (\sigma_2 h_2 - \sigma_1 h_1) = \frac{bh\sigma_2}{2} \left( \frac{h_2}{h} - \frac{h_1^2 k}{h_2 h} \right) = \sigma_2 bh \cdot f(h_2)$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sigma_1 bh_1}{2} \left( \frac{h}{2} - \frac{h_1}{3} \right) + \frac{\sigma_2 bh_2}{2} \left( \frac{h}{2} - \frac{h_2}{3} \right) = \\ (1) \quad &= \sigma_2 bh \frac{h_1^2 k (3h - 2h_1) + h_2^2 (3h - 2h_2)}{12h h_2} = \sigma_2 bh g(h_2) \end{aligned}$$

Si può quindi porre <sup>1)</sup>

$$(2) \quad M = \Delta P \frac{g(h_2)}{f(h_2)} = \Delta P \cdot \lambda(h_2).$$

<sup>1)</sup> Per  $h_1 = 0$  è  $f(h_2) = \frac{1}{2}$ ,  $g(h_2) = \frac{h}{12}$ , da cui

$$\lambda = \frac{h}{6}; \quad \Delta P = \frac{\sigma_2 bh}{2}; \quad M = \frac{h}{6} \Delta P.$$

Il segno di  $\lambda$  dipende da quello della deformata  $v$ .

Se  $P$  è lo sforzo assiale  $P_a + \Delta P$  e  $v$  la deformata corrispondente, si può porre

$$(3) \quad \lambda = \frac{M}{\Delta P} = \frac{M}{P - P_a} = \frac{Pv}{P - P_a} = \frac{v}{1 - \frac{P_a}{P}}.$$

Per  $v$  tendente a zero,  $P$  tende al valore  $P_a$ , e  $\lambda$  ad una funzione, indeterminata di  $z$ . Tutto ciò è in pieno accordo con la natura del fenomeno per cui l'inflessione laterale può avere inizio con una qualsiasi legge iniziale  $\lambda(z)$ .

Il raggio di curvatura  $r$  all'ascissa generica  $z$ , nell'ipotesi della conservazione delle sezioni piane, è legato alle componenti della deformazione dalla relazione

$$\frac{1}{r} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \frac{2}{h} = \frac{\epsilon_2}{h} \left( 1 + \frac{h_1}{h_2} \right) = \frac{\epsilon_2}{h_2},$$

da cui

$$\frac{1}{r} = \frac{\sigma_2}{E_S h_2}.$$

Dalla (1) si ha quindi

$$(4) \quad \frac{1}{r} = \frac{M}{bh g(h_2) E_S h_2} = \frac{M}{EI}$$

dove

$$(5) \quad EI = E_S \frac{12 h_2 g(h_2)}{h^2}$$

è un modulo ideale.

Per

$$\Delta P = 0 \text{ è } \lambda = \infty, f(h_2) = 0, \frac{h_2^2}{h_1^2} = \frac{E}{E_S}, \text{ da cui}$$

$$h_1 = h \frac{\sqrt{E_S}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_S}}, \quad h_2 = h \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_S}},$$

che sono le ben note relazioni di V. Kármán.



Il modulo  $E'$  (fig. 2) è funzione uniforme e simmetrica di  $\lambda$ ; per  $-\frac{h}{\sigma} < \lambda < \frac{h}{\sigma}$  è  $E' = E_S$ ; per  $\lambda$  variante da  $-\frac{h}{\sigma}$  a  $-\infty$  o da  $+\frac{h}{\sigma}$  a  $+\infty$ ,  $E'$  varia da  $E_S$  al valore asintotico

$$E_R = \frac{4E E_S}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_S})^2},$$

modulo ridotto di V. KÀRMÀN.

Poichè  $\lambda$  è funzione di  $v$ , può in definitiva dirsi che anche  $E'$  è funzione

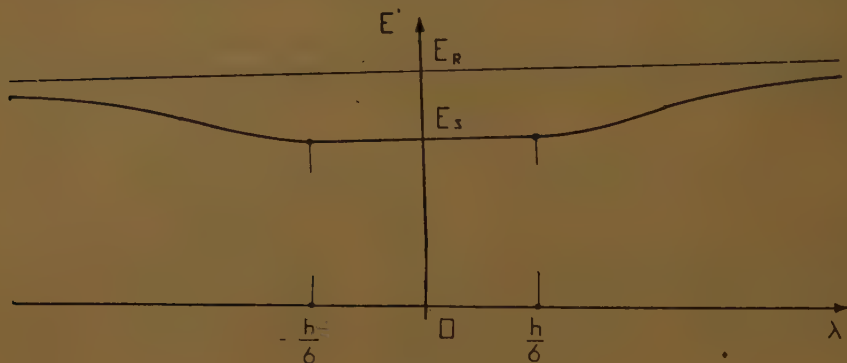


Fig.

di  $v$ , continua, uniforme, simmetrica, imitata fra gli estremi  $E_S$  ed  $E_R$ .

Dalla nota relazione, valida per piccoli spostamenti,

$$\frac{1}{r} = - \frac{d^2 v}{dz^2}$$

e dalla (4), si trae

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = - \frac{M}{E'(v) \cdot I} = - \frac{Pv}{E'(v) \cdot I}$$

da cui

$$(6) \quad \varphi(v) \frac{d^2 v}{dz^2} + Pv = 0 \quad (0 < z < l)$$

avendo posto

$$\varphi(v) = E'(v) \cdot I.$$

Le condizioni ai limiti connesse con la (6) sono

$$(7) \quad \begin{cases} z=0 & v=0 \\ z=l & v=0 \end{cases}$$

La (6) con le (7), è l'equazione fondamentale per lo studio dell'inflessione laterale in regime elastoplastico. Essa è differenziale, del II ordine, non lineare, simmetrica in  $v$ ; per  $E'$  costante si riduce alla ben nota equazione di EULERO.

### 3). — La ricerca del punto di diramazione.

Poichè la (6) non è lineare, per valori di  $P$  inferiori a quello  $P_d$  corrispondente al punto di diramazione essa non ammette che la soluzione  $v=0$ ; per ogni valore di  $P$  superiore a  $P_d$ , accanto alla soluzione  $v=0$ , esistono altre due soluzioni non identicamente nulle. Che queste siano due, l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse delle  $z$ , dipende dalla simmetria dell'equazione rispetto a  $v$ ; si conserva quindi, a norma della teoria generale, la parità o la disparità del numero delle soluzioni al variare di  $P$  nell'intorno di  $P_d$ , conformemente alla definizione di punto di diramazione.

Tutto quanto sopra rimane invariato se la sezione non è rettangolare, salvo la diversità delle funzioni  $f(h_2)$  e  $g(h_2)$ . In questo caso (fig. 2)  $E'=E_s$  per  $\lambda$  minore, in valore assoluto, del raggio di nocciolo  $\rho$  corrispondente al piano della possibile flessione.

Il valore  $P_d$  di  $P$  corrispondente al punto di diramazione può essere determinato, evitando laboriosi calcoli, con considerazioni suggerite da procedimenti caratteristici dell'analisi funzionale <sup>1)</sup>. Assicurata l'esistenza di punti di diramazione, definiti dai valori  $P_{di}$  del parametro  $P$ , questi ultimi coincidono con gli autovalori dell'equazione lineare associata alla (6)

$$(8) \quad \varphi(0) v'' + P v = 0$$

ed avente le stesse condizioni ai limiti (i due apici indicano la derivata seconda rispetto alla variabile  $z$ ). Infatti, se la (6) è soddisfatta dalla fun-

---

<sup>1)</sup> R. CACCIOPPOLI. *Sulle corrispondenze funzionali inverse diramate: teoria generale e applicazione ad alcune equazioni funzionali non lineari e al problema di Plateau*. Rend. Acc. Naz. Lincei, serie VI, vol. XXIV, Roma, 1936.

zione  $\bar{v}$ , lo è pure dalla funzione variata  $\bar{v} + \delta v$ ; sono perciò valide le due relazioni

$$(9) \quad \begin{aligned} \varphi(\bar{v}) \bar{v}'' + P \bar{v} &= 0 \\ \varphi(\bar{v} + \delta v) (\bar{v} + \delta v)'' + P (\bar{v} + \delta v) &= 0. \end{aligned}$$

La seconda delle (9) si scrive

$$\begin{aligned} \left[ \varphi(\bar{v}) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \delta v \right] (\bar{v}'' + \delta v'') + P \bar{v} + P \delta v &= 0 \\ \varphi(\bar{v}) \cdot \bar{v}'' + \varphi(\bar{v}) \delta v'' + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \delta v \bar{v}'' + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \delta v \delta v'' + P \bar{v} + P \delta v &= 0; \end{aligned}$$

sottraendo la prima delle (9) e trascurando il termine in  $\delta v \delta v''$ , si ha

$$\varphi(\bar{v}) \delta v'' + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \delta v \bar{v}'' + P \delta v = 0$$

In corrispondenza dei valori  $P_{di}$  del parametro  $P$ , è ancora  $v = 0$ ; la (10) può quindi scriversi

$$(11) \quad \varphi(0) \delta v'' + P_{di} \delta v = 0$$

con le condizioni ai limiti

$$(12) \quad \begin{cases} z = 0 & \delta v = 0 \\ z = l & \delta v = 0. \end{cases}$$

L'equazione alle variazioni (11) deve ammettere soluzioni diverse dalla  $\delta v = 0$ ; ciò avviene solamente se  $P_{di}$  è un autovalore della (11) connessa con le condizioni ai limiti (12).

Nel caso in esame, per  $v$  tendente a zero,  $\lambda$  tende ad una qualunque funzione  $\lambda(0)$  di  $z$ , purchè rispettante le stesse condizioni ai limiti di  $v$ , e cioè  $\lambda(0) = 0$  per  $z = 0$  e  $z = l$ ; sia  $\lambda^*(0)$  il valore massimo di  $\lambda(0)$ , che può verificarsi in un punto qualunque dell'intervallo  $0 < z < l$ , in particolare in mezzeria.

Il fenomeno presenta, per così dire, due aspetti limite. Il primo è definito dalle relazioni

$$(13) \quad \begin{aligned} 0 &\leq \lambda(0) \leq \rho \\ \lambda^*(0) &= \rho \end{aligned}$$

cui corrispondono per le tensioni  $\sigma'$  i diagrammi iniziali della figura 3. Le (13) sono giustificate dal fatto che almeno in una sezione deve essere  $\lambda = \rho$ . In caso contrario sarebbe possibile scindere l'incremento differenziale  $dP$  in due parti:  $d_a P$  che fornirebbe in tutte le sezioni delle  $\sigma'$  uniformi e pari a  $\frac{d_a P}{A}$ , e  $d_r P$  che darebbe luogo a tensioni  $\sigma'$  non uniformi. Poichè solo la parte  $d_r P$  dell'incremento di carico assiale è accompagnata da flessione, il punto di diramazione non corrisponderebbe più al carico  $P_a$ , ma a quello  $P_a + d_a P$ . In questo primo caso limite è  $E' = E_S$  in tutto l'intervallo  $0 < z < l$ , e la (6) si scrive

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{P}{E_S I} v = 0$$

da cui si ottiene, per il primo punto di diramazione, l'espressione

$$P_a = \frac{\pi^2 E_S I}{l^2} = P_E$$

essendo  $P_E$  il carico critico calcolato con la formula di Engesser.

Il secondo caso limite corrisponde ai massimi valori che  $\lambda$  può assumere, e cioè  $\lambda = \infty$  in tutto l'intervallo  $0 < z < l$ ; questo non è in contrasto con le condizioni ai limiti  $\lambda(0) = 0$  per  $z = 0$  e per  $z = l$ , purchè si ammetta nei due punti suddetti, che sia  $\frac{d\lambda(0)}{dz} = \pm \infty$ . In questo secondo caso limite  $E' = E_R$ , e la (6), scritta nella forma

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{P}{E_R I} v = 0$$

fornisce

$$P_a = \frac{\pi^2 E_R I}{l^2} = P_K$$

carico critico calcolato con la formula di V. Kármán.

Nei casi intermedi fra i due ora esposti  $E'(0)$  è una funzione continua di  $z$ , compresa fra i due estremi  $E_a$  ed  $E_b$  rispettanti la disuguaglianza

$$E_s < E_a < E_b < E_r.$$

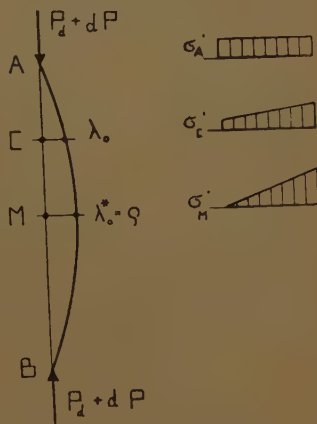


Fig. 3.



Per un noto teorema relativo alle equazioni lineari l'autovalore di ordine  $n$  della (6) è compreso fra i due autovalori di ordine  $n$  delle due equazioni che si ottengono dalla (6) ponendo  $E=E_a$  ed  $E=E_b$ , ed è perciò sempre interno all'intervallo  $P_E P_K$ .

Il carico  $P_a$  sotto cui ha inizio l'inflessione laterale può assumere quindi qualunque valore compreso fra quelli di ENGESSER e di V. KÁRMÁN, dipendentemente dalla legge  $\lambda(0)$  che è come già notato, arbitraria. Il tecnico ovviamente deve valutare la sicurezza all'instabilità paragonando l'effettiva sollecitazione a quella più piccola sotto cui può aver inizio l'inflessione, laterale, e cioè a quella calcolabile secondo Engesser.

Le conclusioni sono sostanzialmente le stesse cui era pervenuto lo Shanley; è da notare però che nel sistema semplificato l'inflessione ha necessariamente inizio per un carico coincidente con quello di Engesser, nella trave ordinaria invece può avere inizio per qualsiasi valore compreso fra i due di Engesser e V. Kármán.

#### 4. -- Una rappresentazione grafica del fenomeno.

Nella figura 4 sono riportati, in funzione della forza assiale  $P$ , i valori  $v^*$  di  $v$  corrispondenti alla sezione in cui  $v$  è massima (almeno nell'intorno di  $v=0$ , si può pensare che l'ascissa di questa sezione non vari con  $P$ ).

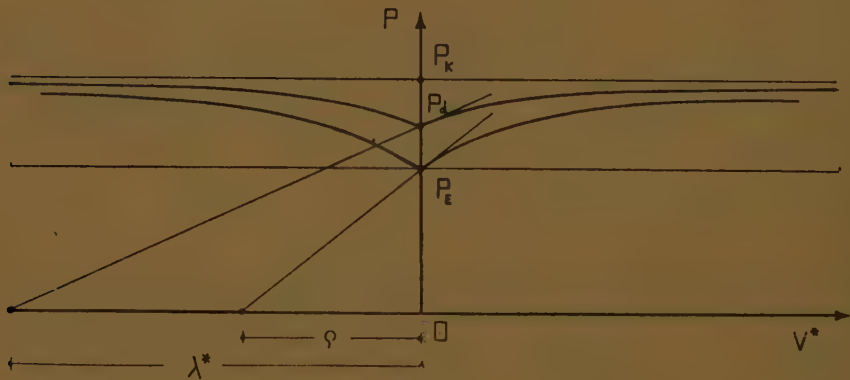


Fig. 4.

La curva  $v^*(P)$  è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, e incontra quest'ultimo in un qualunque punto  $P_a$  compreso fra  $P_E$  e  $P_K$ . L'inclinazione della curva  $v^*(P)$  per  $v=0$  si ricava come segue. Il valore  $\lambda^*$  di  $\lambda$  corrispondente a  $v^*$  è fornito da

$$\lambda^* = \frac{v^*}{1 - \frac{P_a}{P}}$$

e quindi

$$\lambda^*(0) = \lim_{v^* \rightarrow 0} \lambda^* = \lim_{v^* \rightarrow 0} \frac{v^*}{1 - \frac{P_d}{P}} = \lim_{v^* \rightarrow 0} \frac{1}{-P_d \frac{d}{dv^*} \left( \frac{1}{P} \right)} = \frac{P_d}{\left( \frac{dP}{dv^*} \right)_{v^*=0}}$$

da cui

$$\left( \frac{dP}{dv^*} \right)_{v^*=0} = \frac{P_d}{\lambda^*(0)}.$$

L'inclinazione in  $P_E$  coincide col valore corrispondente a  $\lambda^*(0) = \rho$ ; essa è pari cioè a  $\frac{P_E}{\rho}$ . Nel punto  $P_K$  invece è  $\lambda^*(0) = \infty$ , e l'inclinazione è zero.

*Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Novembre 1952.*

## CONTRIBUTO AL CALCOLO DELLE VOLTE A VELA E DELLE VOLTE DI TRASLAZIONE

*Nota dell'ing. Michele Pagano, presentata dal socio A. Galli*

(Adunanza del dì 7 novembre 1953)

**Sunto.** — Nell'ipotesi di comportamento a membrana si perviene a formule approssimate per il tensore dello sforzo per le volte a vela e per le volte di traslazione su pianta quadrata. Dai confronti numerici eseguiti con riferimento ad altri metodi di calcolo e dall'esame delle condizioni di equilibrio globale risulta la buona approssimazione delle formule proposte.

Per le coperture di grandi ambienti a pianta quadrata o rettangolare la più moderna tecnica del cemento armato suggerisce superfici sottili a doppia curvatura. A queste strutture corrispondono consumi limitati di materiale ed una notevole sicurezza alla instabilità dell'equilibrio; di più per le volte di traslazione la costanza della generica sezione trasversale facilita l'esecuzione della cassaforma.

Per queste strutture lo svolgimento dei metodi esatti di calcolo presenta difficoltà pressochè insormontabili da parte dei progettisti: traducendo in termini alle differenze finite le relazioni di equilibrio scritte in corrispondenza dei vertici di una rete distesa sulla volta il FLÜGGE svolge un esempio completo scrivendo un sistema di ventuno equazioni lineari.

Sembra pertanto utile la presente trattazione approssimata, che fornisce semplici espressioni analitiche delle caratteristiche tensionali tabellate per l'impiego della pratica tecnica.

L'approssimazione del metodo può essere migliorata attraverso l'introduzione di un maggior numero di parametri nella espressione della tensione tangenziale; però da confronti numerici con i risultati ottenuti per altra via, si ritiene sufficiente l'approssimazione qui conseguita.

Si consideri nel punto  $P(xy)$  della superficie  $z = f(xy)$  ( $xyz$  essendo una terna cartesiana ortogonale) un elemento delimitato da due coppie di piani verticali (a distanza  $dx$  e  $dy$  tra loro) paralleli ai piani  $yz$  e  $xz$  (fig. 1 a-b).

La proiezione dell'elemento sul piano  $xy$  è ovviamente il rettangolo di lati  $dx$  e  $dy$ .

L'elemento così delimitato proiettato parallelamente a  $z$  sul piano tangente alla superficie nel punto  $P$  è un parallelogramma individuato

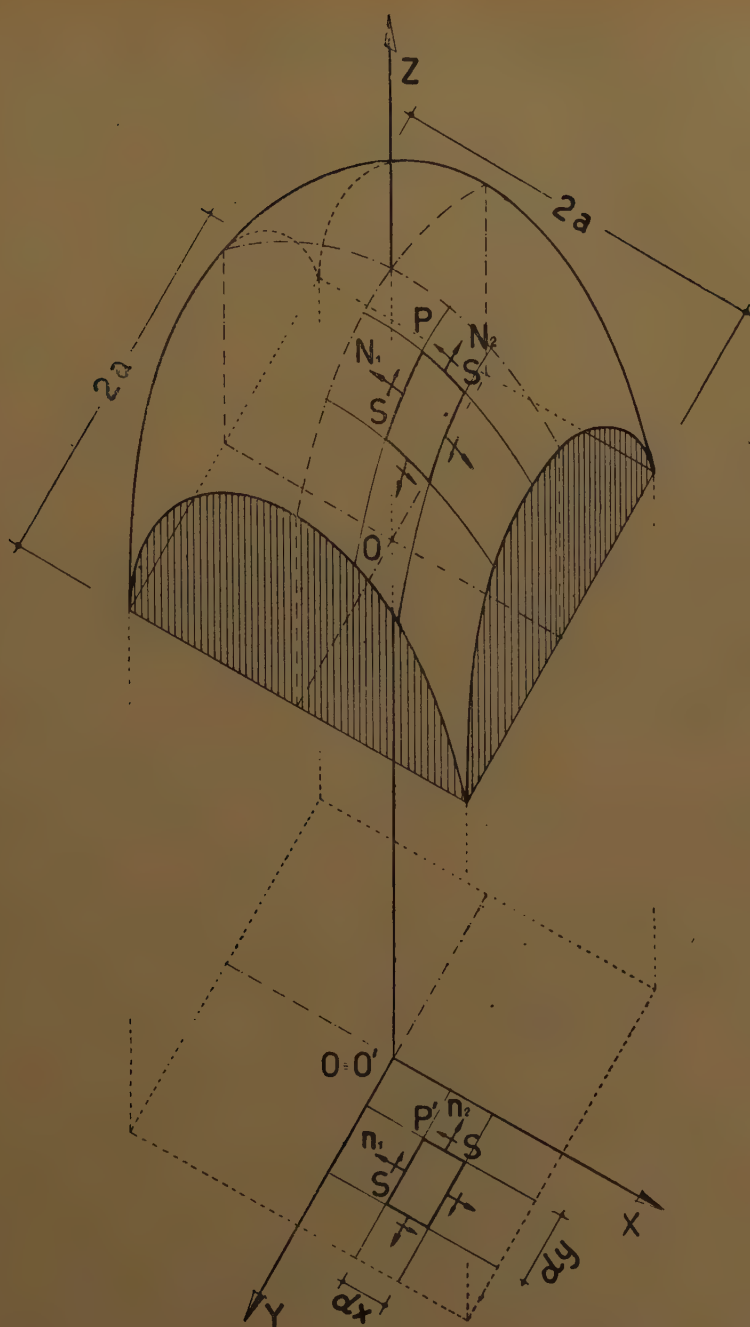
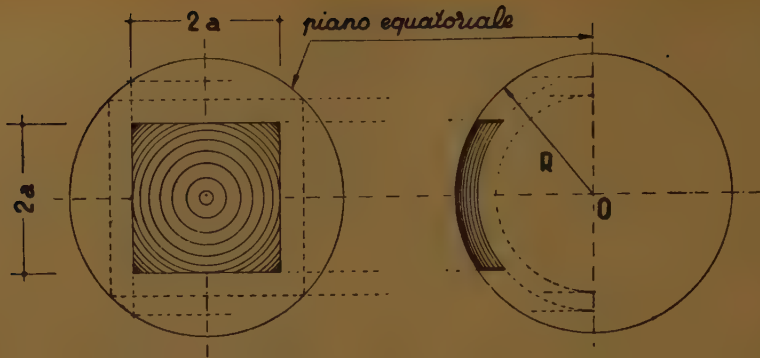


Fig. 1. Volta a vela sferica su pianta quadrata.  
a) vista assonometrica.





b) pianta e sezione.

non appena noti i coseni direttori ( $0 \beta_1 \gamma_1$  e  $\alpha_2 0 \gamma_2$ ) delle tangenti in P (xy) contenute nei suddetti piani verticali.

Indichiamo con  $N_1 N_2 S$  le componenti degli sforzi sulle facce dell'elemento valutate parallelamente alle suddette tangenti in P (xy).

Rapportando le proiezioni su xy delle forze agenti sull'elemento alle lunghezze dx e dy si ottengono gli sforzi  $n_1, n_2$  riferiti all'unità di lunghezza dei lati dell'elemento rettangolare dx dy.

Sussistono le relazioni

$$(1) \quad n_1 = N_1 \frac{\alpha_2}{\beta_1}, \quad n_2 = N_2 \frac{\beta_1}{\alpha_2}.$$

Indicando con X Y Z le componenti cartesiane del carico agente sull'elemento riferite all'unità di area in proiezione orizzontale, con le posizioni precedentemente fatte, le condizioni di equilibrio (secondo i tre assi) assumono l'aspetto seguente

$$\frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} + Y = 0$$

$$r n_1 + t n_2 + 2 s S + \zeta = 0$$

ove

$$\zeta = Z - pX - qY$$

e p, q, r, s, t sono i soliti simboli rappresentativi delle derivate parziali della  $f(xy)$ .

Il presente studio considera l'effetto del peso proprio e del sovraccarico uniformemente distribuito in pianta: il sistema in questo caso ( $X = Y = 0$ ;  $\zeta = Z$ ) si scrive

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial n_2}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} &= 0 \\ r n_1 + t n_2 + 2 s S + Z &= 0. \end{aligned}$$

Il sistema (2) è definito non appena nota l'equazione della superficie della volta e la funzione  $Z$ .

Ove si assuma per  $S$  l'espressione polinomiale emisimmetrica

$$S = K'_1 xy + K'_2 (x^3 y + x y^3) + K'_3 x^3 y^3,$$

con  $K'_1$   $K'_2$   $K'_3$  coefficienti incogniti da determinare, le prime due equazioni del sistema (2) forniscono con quadrature le espressioni di  $n_1$  e  $n_2$  (le costanti d'integrazione si determinano soddisfacendo le condizioni al contorno). La terza equazione scritta in corrispondenza di tre punti caratteristici della volta fornisce un sistema atto a determinare i valori dei coefficienti  $K'_1$   $K'_2$   $K'_3$ . Dai valori così ottenuti per  $n_1$  ed  $n_2$  è facile risalire, tramite le (1), a quelli di  $N_1$  e  $N_2$ .

La determinazione delle tensioni principali si può conseguire con il cerchio di Mohr rappresentativo dello stato tensionale nel piano tangente alla superficie in  $P$  ( $xy$ ) (fig. 2 a-b-c).

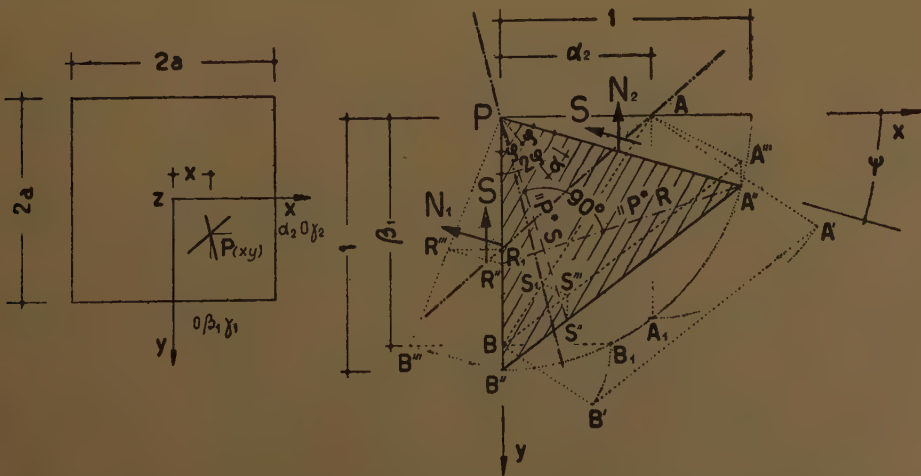
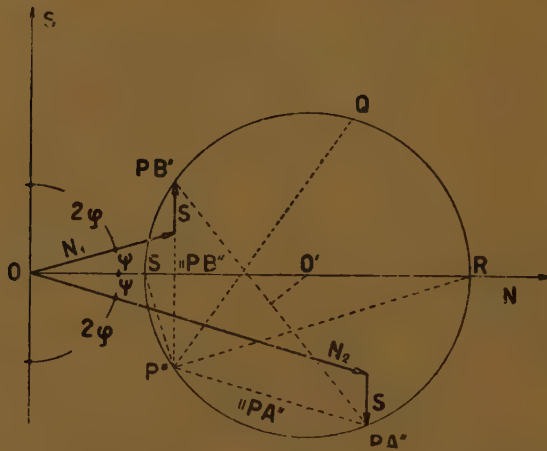


Fig. 2. Determinazione delle tensioni principali  
a, pianta; b) elemento superficiale proiettato sul piano tangente in P.

Si riportano i dati più salienti relativi all'applicazione di quanto sopra alla volta a vela sferica e alla volta di traslazione su pianta quadrata <sup>1)</sup>.



c) Cerchio di Mohr.

### *Volta a vela sferica (fig. 1 a-b).*

La volta di raggio R sia delimitata dai quattro piani  $x = \pm a$ ,  $y = \pm a$ . Il rapporto  $R/a$  è l'indice del ribassamento della volta. L'equazione della volta è

$$(3) \quad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad \begin{array}{l} -a \leq x \leq +a \\ -a \leq y \leq +a \end{array}$$

Per il peso proprio l'espressione di Z è

$$(4) \quad Z = -g \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

La terza equazione del sistema (2) assume quindi l'aspetto

$$(5) \quad n_1 (R^2 - y^2) + n_2 (R^2 - x^2) + 2 S x y = -Rg (R^2 - x^2 - y^2).$$

Se si assume per S l'espressione

$$(6) \quad S = \frac{g}{a} K_1 xy + \frac{g}{a^3} K_2 (xy^3 + x^3y) + \frac{g}{a^5} K_3 x^3 y^3$$

<sup>1)</sup> In una nota tecnica a parte sono consegnate le tabelle relative ai valori di  $N_1, N_2, S, \beta, \alpha$ , per le volte a pianta quadrata e la estensione del metodo al caso di pianta rettangolare.

le prime due equazioni della (2) forniscono, integrando ed annullando ai rispettivi bordi il valore dello sforzo normale,

$$(7) \quad n_1 = -\frac{K_1 g}{2a} (x^2 - a^2) - \frac{K_2 g}{4a^3} (x^4 - a^4) - \frac{3K_2 g}{2a^3} y^2 (x^2 - a^2) - \frac{3K_3 g}{4a^5} y^2 (x^4 - a^4)$$

$$(8) \quad n_2 = -\frac{K_1 g}{2a} (y^2 - a^2) - \frac{K_2 g}{4a^3} (y^4 - a^4) - \frac{3K_2 g}{2a^3} x^2 (y^2 - a^2) - \frac{3K_3 g}{4a^5} x^2 (y^4 - a^4)$$

e la (5), scritta nei punti (0, 0) (0, a) (a, 0) (a, a) dopo di aver sostituito le (6), (7) e (8), fornisce  $K_1 K_2 K_3$

$$(9) \quad \begin{aligned} K_1 &= -\frac{2}{3} \frac{R}{a} \left\{ \frac{3}{4} \left[ \left( \frac{R}{a} \right)^2 - 2 \right] - 1 \right\} \\ K_2 &= -\frac{2}{3} \frac{R}{a} \left\{ \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{R}{a} \right)^2 - 2 \right] - 5 \right\} \\ K_3 &= -2 \frac{R}{a} \left\{ \left[ \left( \frac{R}{a} \right)^2 - 2 \right] - 3 \right\}. \end{aligned}$$

La (5), scritta ancora nei punti (a/2, a/2), (a/2, a) (0, a/2), e la relazione di equilibrio globale sono utilizzate per saggiare l'approssimazione conseguita.

Per il sovraccarico uniforme il procedimento è del tutto analogo; l'espressione (4) diventa

$$(13) \quad Z = -p.$$

La (5) in conseguenza diventa

$$(14) \quad n_1 (R^2 - y^2) + n_2 (R^2 - x^2) + 2Sxy = -p(R^2 - x^2 - y^2)^{3/2}.$$

Non essendo variata la (6) anche la (7) e la (8) non si modificano mentre le (9), attraverso l'impiego della (14), forniscono

$$(15) \quad \begin{aligned} K_1 &= \frac{3}{4} \left( \frac{R^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{a^2} - 2 \right)^{3/2} - \frac{2}{3} \frac{R}{a} \\ K_2 &= -\frac{8}{3} \left( \frac{R^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} + \left( \frac{R^2}{a^2} - 2 \right)^{3/2} - \frac{2}{3} \frac{R}{a} \\ K_3 &= 4 \left( \frac{R^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} + \left( \frac{R^2}{a^2} - 2 \right)^{3/2} + 2 \frac{R}{a}. \end{aligned}$$



*Volte di traslazione su pianta quadrata (fig. 3).*

Il procedimento è del tutto analogo a quello precedentemente svolto per le volte a vela.

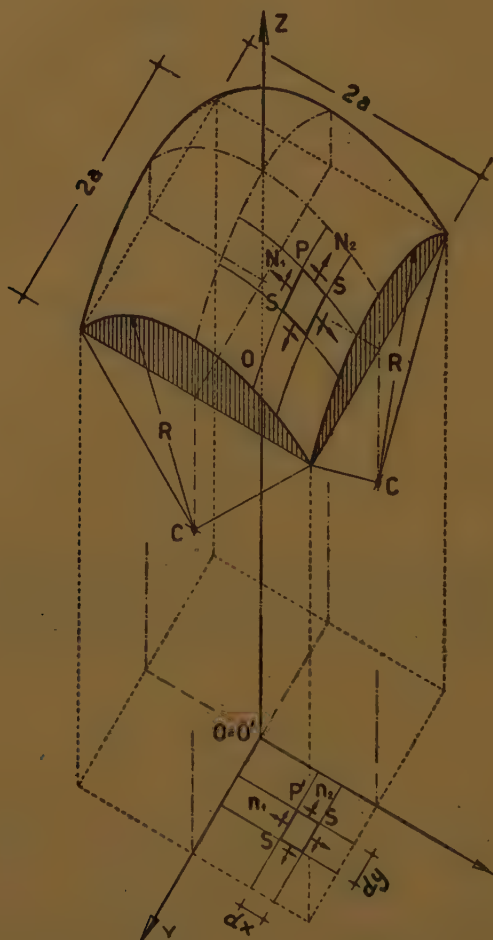


Fig. 3. Volta di traslazione

L'equazione della volta diventa

$$(16) \quad z = -R + \sqrt{R^2 - y^2} + \sqrt{R^2 - x^2},$$

e la (5), per il peso proprio, si scrive

$$(17) \quad n_1 \frac{R^2}{(R^2 - x^2)^{3/2}} + n_2 \frac{R^2}{(R^2 - y^2)^{3/2}} = g \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} + \frac{y^2}{R^2 - y^2}}.$$

Rimangono ancora invariate la (6) e, quindi, la (7) e la (8) mentre le

(9) attraverso il sistema che si ottiene scrivendo la (17) nei punti (0, 0), (0, a), (0, a/2) diventano <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{3} \left[ \frac{R}{a} (3.5 - \gamma_1) + 0.75 K_3 \right] \\ (18) \quad K_2 &= - \frac{1}{3} \left[ \frac{R}{a} (1 - 2\gamma_1) + 1.50 K_3 \right] \\ K_3 &= 14, (2) \frac{R}{a} \left[ -3 \frac{\gamma_1}{\gamma} + 0.75 \frac{\gamma_2}{\gamma} + 1.078125 + 0.09375\gamma_2 + \frac{1.125}{\gamma} \right] \end{aligned}$$

essendo

$$\gamma = \frac{\frac{R^3}{a^3}}{\left(\frac{R^2}{a^2} - \frac{1}{4}\right)^{3/2}}; \quad \gamma_1 = \frac{\frac{R}{a}}{\left(\frac{R^2}{a^2} - \frac{1}{4}\right)^{1/2}}; \quad \gamma_2 = \frac{\frac{R}{a}}{\left(\frac{R^2}{a^2} - 1\right)^{1/2}}.$$

Infine per il sovraccarico uniforme p si ha

$$(19) \quad n_1 \frac{R^2}{(R^2 - x^2)^{3/2}} + n_2 \frac{R^2}{(R^2 - y^2)^{3/2}} = p$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{3} \left( 2.5 \frac{R}{a} + 0.75 K_3 \right) \\ (20) \quad K_2 &= \frac{1}{3} \left( \frac{R}{a} - 1.50 K_3 \right) \\ K_3 &= -14, (2) \frac{R}{a} \left[ \frac{1.125}{\gamma} - 1.171875 \right]. \end{aligned}$$

Per  $R/a=2$  si raffrontano in figura 4 i risultati ottenuti dal Flügge, con un sistema di ventuno equazioni, con quelli ritrovati con il presente procedimento.

<sup>1)</sup> Nel punto (a, a) non è possibile per la (17)  $n_1 = n_2 = 0$  se  $g \neq 0$ : quindi nel punto (a, a) la (17) non è soddisfatta.

Come si rileva dalla fig. 4, ciò non ha conseguenze sensibili sui valori delle tensioni nei punti della volta non adiacenti il vertice (a, a).

Nei punti (0, 0), (0, a), (a, 0), (a, a) per le volte a vela, e nei punti (0, 0), (0, a/2), (0, a), (a, 0), (a/2, 0) per le volte di traslazione, l'errore percentuale è nullo.

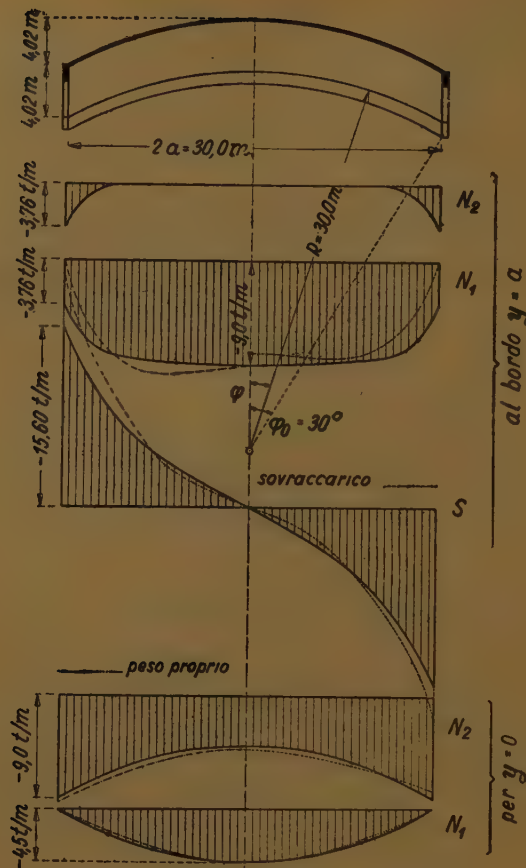


Fig. 4. — Diagrammi di  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $S$ .

- esempio svolto dal FLÜGGE (peso proprio 0,3 t mq)
- - - - - trattazione approssimata (peso proprio 0,3 t mq)
- ..... trattazione approssimata sovraccarico 0,3 t mq

## BIBLIOGRAFIA

- AIMOND F. *Le voiles minces* etc. Le Genie Civil, n° 8, 25-2-1933.
- AIMOND F. *Étude des voiles minces* etc. II Congresso dell' A.I.P.C., Publ. Prel.
- LAFAILLE B. *Mémoire sur l' étude des surfaces gauches minces*. Mém. A.I.P.C., IV, vol., 1936.
- AIMOND F. *Étude statique des voiles minces* etc. Mém. A.I.P.C., IV vol., 1936.
- BESCHKINE L. *Étude sur les surfaces auto portantes* etc. Mém. A.I.P.C., IV vol., 1936.
- FLÜGGE W. *Statik und Dynamik der Schalen*. J. Springer, Berlino, 1934.
- KRALL G. *Strutture in foglio*. Questioni di Matematica applicata. Bologna, Zanichelli, 1939.

Napoli - Istituto di Costruzioni in legno, ferro e cemento armato.

SULLA DETERMINAZIONE DELLE SOLLECITAZIONI MASSIME NEI SISTEMI  
AD ALTO GRADO DI IPERSTATICITÀ

*Nota dei dott. Aldo Raithel e Aldo Ambrosanio, presentata dal socio A. Galli*

(Adunanza del dì 7 novembre 1953)

**Sunto.** — Rilevate le difficoltà applicative che presenta la determinazione dei massimi e dei minimi delle caratteristiche della sollecitazione nei sistemi solidali, si riporta un metodo di calcolo che ne permette la determinazione in modo rapido e sintetico. La esposizione del procedimento è completata da applicazioni numeriche.

*Premessa.*

Il metodo di calcolo che si espone si avvale di un recente procedimento per la determinazione delle linee di influenza <sup>1)</sup> che permette di valutare in modo immediato il contributo delle varie campate nel calcolo del valore della sollecitazione di cui si ricerca il massimo od il minimo.

In quanto segue si tratterà esclusivamente dei sistemi costituiti da aste rettilinee, di sezione comunque variabile per condizioni di carico mobile uniformemente distribuito.

All'applicazione del metodo proposto si fa precedere un breve riepilogo del su accennato procedimento per la ricerca delle linee di influenza.

1) — *La determinazione delle linee di influenza.*

La ricerca della linea di influenza di una qualsiasi caratteristica della sollecitazione in corrispondenza della sezione  $s$  della trave generica I—K appartenente ad una struttura solidale, può ottenersi mediante la sovrapposizione di due deformate:

la prima, che indicheremo con  $y_0$ , è fornita dalla linea di influenza determinata per la trave I—K semplicemente appoggiata agli estremi (v. fig. 1); la seconda,  $y_m$ , è ottenuta mediante l'applicazione agli estremi

---

<sup>1)</sup> A. RAITHEL. *Sulla determinazione delle linee di influenza nei sistemi ad alto grado di iperstaticità*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., s. 4<sup>a</sup>, vol. XVIII. Napoli, 1951.



della trave e dei complessi elastici di vincoli delle coppie atte a ripristinare la congruenza della deformazione (continuità angolare) (ved. fig. 2).

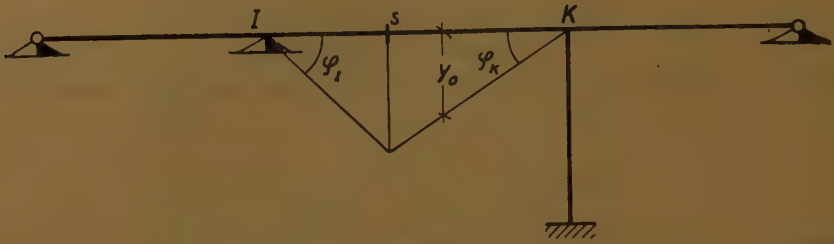


Fig. 1.

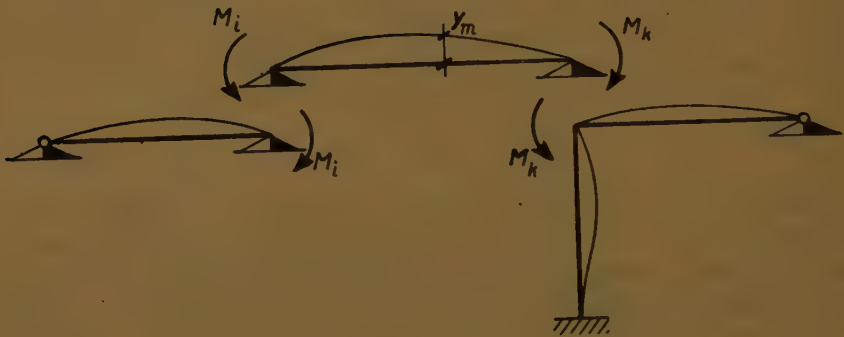


Fig. 2.

Le ordinate della linea di influenza risultano quindi

$$(1) \quad y = y_0 + y_m$$

che, indicando rispettivamente con  $y_{wi}$  e  $y_{wk}$  i coefficienti di influenza dell'abbassamento per coppie unitarie agenti rispettivamente in I e in K, si scrive

$$(1') \quad y = y_0 + M_i y_{wi} + M_k y_{wk}$$

La determinazione dei momenti  $M_i$  ed  $M_k$  si esegue con gli usuali metodi di calcolo in funzione dei momenti di incastro perfetto atti ad annullare le rotazioni di estremità della trave I—K derivanti dalla prima operazione (fig. 1).

I valori dei coefficienti di influenza  $y_{wi}$  e  $y_{wk}$  e dei momenti di incastro perfetto sono riportati in appendice. Per tutte le altre campate, ad esempio la K—L di fig. 1 risulta  $y_0=0$  e si ha quindi semplicemente

$$y = M_k y_{wk} + M_i y_{wi}$$

In quanto segue per la determinazione dei valori finali dei momenti ci si avvale del metodo di Cross.

## 2) — *Esposizione del metodo.*

La determinazione dei massimi e minimi valori delle caratteristiche della sollecitazione si esegue, come è noto, mediante la valutazione delle aree positive e negative (superfici di influenza) della corrispondente linea di influenza.

Detta determinazione è immediata ove si conoscano i momenti agli estremi di ciascuna campata. Infatti per la campata I—K la superficie di influenza vale

$$(2) \quad A_{ik} = \int y_0 \, dx + M_i \int y_{xi} \, dx + M_k \int y_{xk} \, dx$$

mentre per le altre campate manca evidentemente il primo termine essendo  $y_0 = 0$ .

E' utile osservare che nel caso della linea di influenza del taglio nonchè di quella del momento per sezioni prossime ad un incastro, esiste nella campata I—K un punto di nullo per cui occorre valutare separatamente i valori delle aree positive e negative, valutazione resa possibile dalla tabellazione delle aree riportate in appendice relative all'applicazione ad un estremo di una coppia unitaria.

## 3) — *La pratica del procedimento.*

Con riferimento alle pratiche applicazioni ove occorra determinare valori dei massimi per sezioni appartenenti a diverse campate, è senz'altro conveniente eseguire la determinazione dei momenti nella struttura sotto l'azione di una coppia unitaria applicata separatamente in ciascun nodo.

I momenti finali corrispondenti a ciascun caso particolare in esame sono allora immediatamente ottenibili mediante il principio di sovrapposizione degli effetti tenendo conto dei valori effettivi dei momenti d'incastro perfetto.

Consideriamo ad esempio la struttura di fig. 3, le cui caratteristiche

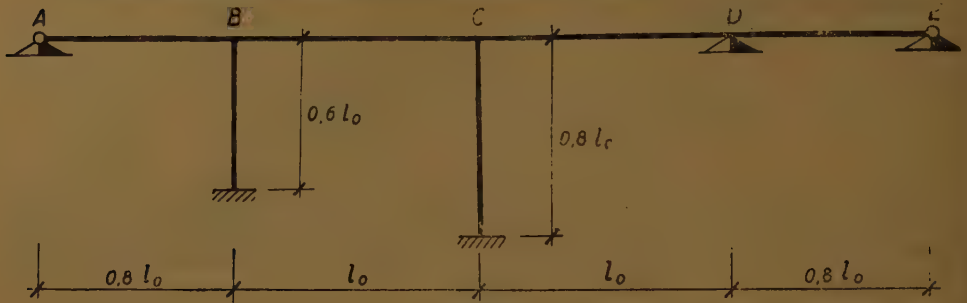


Fig. 3.

geometriche e d'inerzia, espresse in funzione dei parametri fondamentali  $l_0$  e  $J_0$ , sono di seguito riportate:

Campate A-B; D-E	$J = J_0$	$K = 1,5625 K_0$
Campate B-C; C-D	$J = J_0$	$K = K_0$
Ritti	$J = 0,1 J_0$	

Si è introdotto inoltre per ogni asta la costante  $K'_2 = EJ/l^2$  espressa in funzione del valore  $K_0 = EJ_0/l_0^2$ .

Nella tabella seguente sono riportati i valori dei momenti agli estremi delle varie aste per l'azione di una coppia unitaria oraria applicata rispettivamente nei nodi B, C e D.

La convenzione dei segni è quella usuale del metodo di Cross (momenti positivi se orari).

TABELLA I

Nodo	$M_{ba}$	$M_{bc}$	$M_{cd}$	$M_{cb}$	$M_{dc}$	$M_{de}$
b	-0,47308	-0,44186	-0,12618	+0,11003	+0,03055	-0,03055
c	+0,11832	-0,13962	-0,46879	-0,46332	-0,12870	+0,12870
d	-0,03048	+0,03597	+0,12095	-0,13846	-0,48283	-0,51717

a) Ricerca del massimo e minimo momento nella sezione di ascissa  $x=0,4l_0$  della campata HC.

I valori dei momenti di incastro perfetto sono (v. (4) in appendice)

$$M_{bc} = 2 K_0 (0,4 - 1,2) l_0 = -1,6 K_0 l_0$$

$$\bar{M}_{cb} = -2 K_0 (0,6 - 0,8) l_0 = +0,4 K_0 l_0$$

I corrispondenti momenti finali si ricavano sommando a questi valori

quelli della prima e seconda riga della tabella I moltiplicati rispettivamente per  $-1,6$  e per  $+0,4$  (v. Tabella II).

TABELLA II

$M^{bc} (0,4 l_0)$	$M_{ba}$	$M_{bc}$	$M_{cb}$	$M_{cd}$	$M_{dc}$	$M_{de}$
$\bar{M}/K_0 l_0$		$-1,60000$	$+0,40000$			
$-1,6 M^b/K_0 l_0$	$+0,75693$	$+0,70698$	$+0,20189$	$-0,17605$	$-0,04888$	$+0,04888$
$+0,4 M^c/K_0 l_0$	$+0,04733$	$-0,05585$	$-0,18752$	$-0,18533$	$-0,18533$	$-0,05148$
$M/K_0 l_0$	$+0,80426$	$-0,94887$	$+0,41437$	$-0,36138$	$-0,10036$	$+0,10036$

Noti questi valori si hanno tutti gli elementi per la valutazione delle superfici di influenza delle singole campate che, ricordando la convenzione circa il verso positivo dei momenti, sono

Campata A B —

Dalla (10'') riportata in appendice si ha

$$A_1 = - \frac{M_{BA}}{K} u_1 \cdot l = - \frac{0,80426 l_0}{1,5625} 0,0416667 \cdot 0,8 l_0 = - 0,0171575 l_0^2.$$

Campata B C —

Dalla (5) e (10'') si ottiene

$$A_2 = + s_{0,4} \cdot l_0^2 - \frac{M_{BC} + M_{CB}}{K_0} u_1 \cdot l_0 = (0,12 - 0,0568017) l_0^2 = + 0,0631983 l_0^2.$$

Campata C D —

$$A_3 = - \frac{M_{CD} - M_{DC}}{K_0} u_1 \cdot l_0 = - 0,0108758 l_0^2.$$

Campata DE —

$$A_4 = + \frac{M_{DE}}{K} u_1 \cdot l = + 0,0021410 l_0^2.$$



Detto  $p$  il carico mobile uniformemente ripartito, i momenti massimo e minimo risultano <sup>1)</sup>

$$M_{max} = (A_2 + A_4) p = + 0,0653393 p l_0^2$$

$$M_{min} = (A_1 + A_3) p = - 0,0280333 p l_0^2 .$$

b) Ricerca del massimo e minimo taglio nella sezione di ascissa  $x = 0,6 l$  della campata D E .

Dalle (7') risulta

$$\bar{M}_{DE} = + 3 K = + 4,6875 K_0$$

Operando come nel caso precedente si hanno i momenti finali riportati nell'ultima riga della seguente

TABELLA III

$T_{de}$	$M_{ba}$	$M_{bc}$	$M_{cb}$	$M_{cd}$	$M_{dc}$	$M_{de}$
$M/K_0$						$+ 4,68750$
$+ 4,6875 M^d/K_0$	$-0,14287$	$+0,16861$	$+0,56695$	$-0,64903$	$-2,26326$	$-2,42424$
$M/K_0$	$-0,14287$	$+0,16861$	$+0,56695$	$-0,64903$	$-2,26326$	$+ 2,26326$

Si hanno allora i seguenti valori delle aree di influenza

$$A_1 = + \frac{M_{BA}}{K} u_1 l = + 0,0030479 l_0$$

$$A_2 = - \frac{M_{CB} - M_{BC}}{K_0} u_1 l_0 = - 0,0165975 l_0$$

$$A_3 = + \frac{M_{DC} - M_{CD}}{K_0} u_1 l_0 = + 0,0672596 l_0 .$$

Per la campata D E occorre tener presente che in corrispondenza della sezione in cui si cerca la sollecitazione massima le ordinate della linea di influenza cambiano di segno.

<sup>1)</sup> Per l'azione di un carico fisso  $g$  uniformemente ripartito è  $M = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) g = 0,0373060 g l_0^2$ .

Occorre quindi calcolare separatamente un'area positiva ed una negativa. Si ha, mediante le (8), (10) e (10')

$$A_4' = - t_{0,6} \cdot l + \frac{M_{DE}}{K} u_{0,6} \cdot l = - 0,1099316 l_0$$

$$A_4'' = + t'_{0,6} \cdot l + \frac{M_{DE}}{K} u'_{0,6} \cdot l = + 0,0782145 l_0.$$

E' allora

$$T_{max} = (A_1 + A_3 + A_4') p = 0,1485220 pl_0$$

$$T_{min} = (A_2 + A_4'') p = - 0,1265291 pl_0.$$

Si noti che i momenti, riportati nella tabella III, non dipendono dalla ascissa della sezione per cui la determinazione delle superfici di influenza ne risulta indipendente salvo che per la campata cui la sezione appartiene <sup>1)</sup>.

#### 4) — Osservazione.

Come si è già accennato in precedenza per le sezioni prossime ad un estremo e più precisamente per quelle comprese fra una estremità ed il relativo punto fisso <sup>2)</sup> la linea di influenza del momento presenta un punto di nullo e quindi la superficie d' influenza si compone in due aree di segno opposto. Occorre allora per il loro calcolo determinare preventivamente la sezione di ordinata nulla.

Consideriamo ad esempio la sezione di ascissa  $x = 0, 1 \cdot l$  della campata CD (fig. 3).

Questa sezione si trova nelle condizioni su esposte come si rileva dal diagramma dei momenti per la coppia unitaria in D dal quale risulta che il punto fisso di sinistra dista dall' estremo C di  $0,13846/(0,13846 + 0,48283) \cdot l_0 = 0,223 l_0$ .

Ciò premesso si calcolano i momenti d' incastro perfetto

$$\bar{M}_{CD} = - 3, 4 K_0 l_0$$

$$\bar{M}_{DC} = - 1, 4 K_0 l_0$$

<sup>1)</sup> Volendo calcolare ad esempio il taglio in E (coincidente con la reazione  $R_E$  a meno del segno), valgono i calcoli precedenti eccetto che per la campata DE cui corrisponde  $A_4 = - t_1 l + \frac{M_{DE}}{K} u_1 l = - 0,3517172 l_0$ , e in definitiva  $T_{max} = + 0,0703075 pl_0$ ,  $T_{min} = - 0,3683147 pl_0$ .

<sup>2)</sup> La posizione dei punti fissi può immediatamente ottenersi dai diagrammi dei momenti relativi alle coppie unitarie agenti nei nodi.

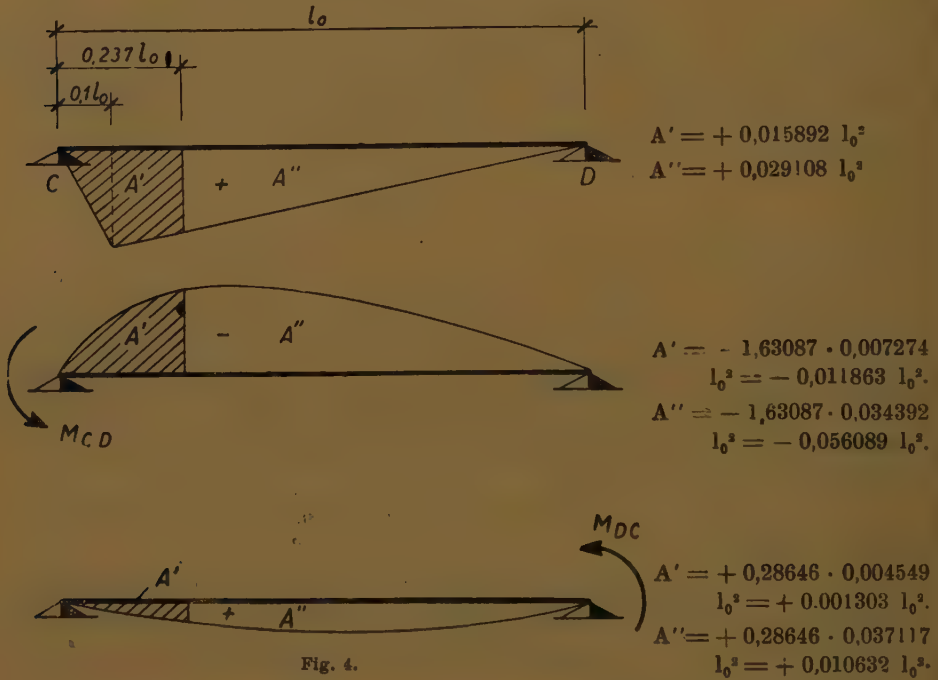
cui corrispondono per la campata in esame

$$M_{CD} = - 1,63083 K_0 l_0$$

$$M_{DC} = - 0,28646 K_0 l_0.$$

L'ordinata generica della linea d'influenza è fornita dalla (1') che uguagliata a zero porge l'ascissa di ordinata nulla; nel nostro caso si ottiene il valore  $0,237 l_0$ .

La valutazione dell'area positiva e di quella negativa della superficie di influenza della campata in esame porge (v. figg. 4 a-b-c)



$$A_3' = (0,015892 + 0,001303 - 0,011864) l_0^2 = + 0,005331 l_0^2$$

$$A_3'' = (0,029108 + 0,010632 - 0,056089) l_0^2 = - 0,016349 l_0^2$$

in cui il calcolo delle aree corrispondenti alla linea di influenza della trave appoggiata si è eseguito mediante le (11) e (11') dell'appendice.

Appendice.

1). Formule per la determinazione dei momenti massimi.

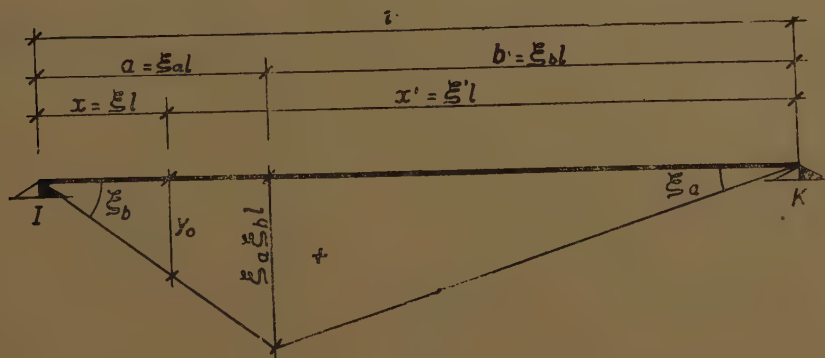


Fig. 5.

$$(3) \quad \begin{aligned} y_0 &= \xi_b \xi l & \text{per } \xi \leq \xi_a \\ y_0 &= \xi_a \xi' l & \text{per } \xi \geq \xi_a \end{aligned}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} \bar{M}_I &= -2Kl (\xi_a - 2\xi_b) \\ \bar{M}_K &= +2Kl (\xi_b - 2\xi_a) \end{aligned} \quad \text{per incastri perfetti in I e K}$$

$$(4') \quad \begin{aligned} \bar{M}_I &= -3Kl \xi_b \\ \bar{M}_K &= 0 \end{aligned} \quad \text{per incastro perfetto in I ed appoggio in K}$$

$$(5) \quad A = \frac{\xi_a \xi_b l^2}{2} = s l^2$$

Tabellazione dei coefficienti s

$\xi$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
s	0,000	0,045	0,080	0,105	0,120	0,125	0,120	0,105	0,080	0,045	0,000



2). Formule per la determinazione dei tagli massimi.

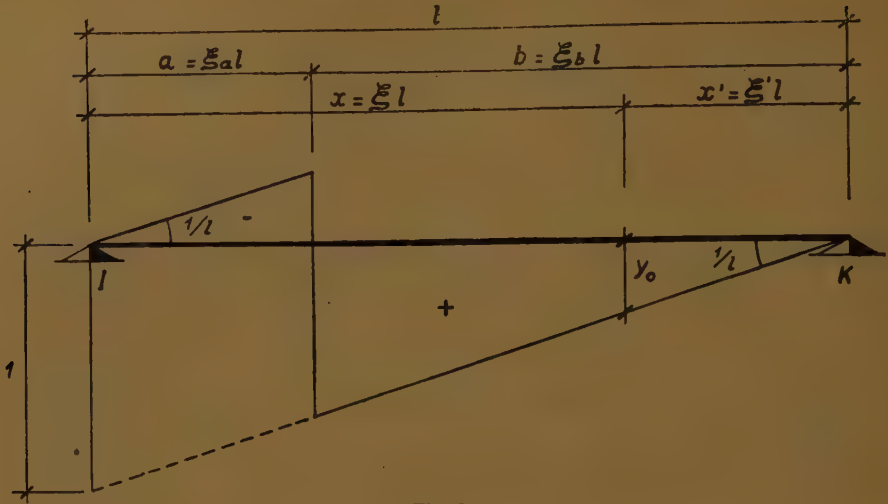


Fig. 6.

$$(6) \quad \begin{aligned} y_0 &= -\xi & \text{per } \xi \leq \xi_a \\ y_0 &= +\xi' & \text{per } \xi \geq \xi_a \end{aligned}$$

$$(7) \quad \bar{M}_i = \bar{M}_k = 6K \quad \text{per incastri perfetti in I e K}$$

$$(7') \quad \begin{aligned} \bar{M}_i &= 3K \\ \bar{M}_k &= 0 \end{aligned} \quad \text{per incastro perfetto in I ed appoggio in K}$$

$$A^- = -\frac{\xi^2 l}{2} = -t l$$

$$(8) \quad A^+ = +\frac{\xi'^2 l}{2} = +t' l$$

Tabellazione dei coefficienti  $t$  e  $t'$

$\xi$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$t$	0,000	0,005	0,020	0,045	0,080	0,125	0,180	0,245	0,320	0,405	0,500
$t'$	0,500	0,405	0,320	0,245	0,180	0,125	0,080	0,045	0,020	0,005	0,000

3.) Coefficienti di influenza per coppie agli estremi.

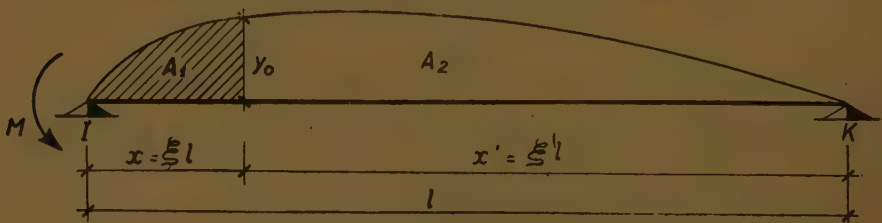


Fig. 7.

$$(9) \quad y_{\text{cat}} = \frac{M l^2}{6 EJ} (\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi)$$

$$(10) \quad A_1 = \frac{M l^3}{24 EJ} (4\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4) = \frac{M}{K} u l$$

$$(10)' \quad A_2 = \frac{M l^3}{24 EJ} (-4\xi^2 + 4\xi^3 - \xi^4 + 1) = \frac{M}{K} u' l$$

$$(10'') \quad A_1 + A_2 = \frac{M l^3}{24 EJ} = \frac{M}{K} u_1 l; \quad u_1 = u + u' = 0,0416667$$

Tabellazione dei coefficienti  $u$  ed  $u'$ .

$\xi$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$u$	0,0000000	0,0008292	0,0032667	0,0071625	0,0122667	0,0182292
$u'$	0,0416667	0,0408375	0,0384000	0,0345042	0,0294000	0,0234375
$\xi$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
$u$	0,0246000	0,0308292	0,0362667	0,0401625	0,0416667	
$u'$	0,0170667	0,0108375	0,0054000	0,0015042	0,0000000	

N. B. Se la coppia è applicata in K basta sostituire al valore di  $\xi$  quello di  $\xi'$  ed invertire  $u$  con  $u'$ .

4). Aree parziali della superficie di influenza del momento per la trave appoggiata.

a) Sez.  $x = 0,1 l$

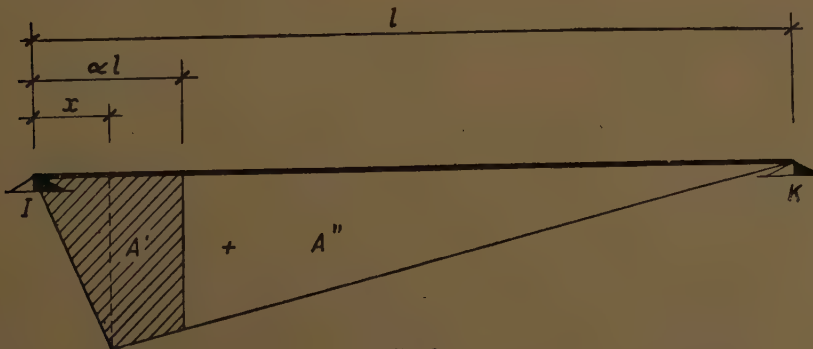


Fig. 8.

$$(11) \quad \begin{aligned} A &= v l^2 \\ A' &= v' l^2 \end{aligned}$$

$$(11') \quad \begin{aligned} v &= -0,05 \alpha^2 + 0,1 \alpha - 0,005 \\ v' &= 0,05 \alpha^2 - 0,1 \alpha + 0,050 \end{aligned}$$

b) Sez.  $x = 0,2 \text{ l}$

$$(12) \quad \begin{aligned} A &= v \text{ l}^2 \\ A' &= v' \text{ l}^2 \end{aligned}$$

$$(12') \quad \begin{aligned} v &= -0,1 \alpha^2 + 0,2 \alpha - 0,02 \\ v' &= 0,1 \alpha^2 - 0,2 \alpha + 0,10 \end{aligned}$$

RICERCHE ISTOFISIOLOGICHE E MORFOLOGICHE E ANNOTAZIONI  
STORICHE E CRITICHE

*Memoria del socio ordinario Vincenzo Diamare*

(Con 1 tavola e una figura nel testo)

(presentata nell' *Adunanza del* 7 marzo 1953

per la inserzione nel volume in corso degli *Atti*)

**Sunto.** — Sono riferite ricerche nuove e riprese altre precedenti in relazione a studi e lavori che trattano gli stessi argomenti, rettificando dati con considerazioni critiche, stabilendo priorità, rifiutando omologie, analogie, teorie e deduzioni. Viene trattato di molti organi in separati capitoli (tessuto specifico nel cuore, capsule surrenali e loro particolari in vertebrati, e loro equivalenti morfologici) e viene illustrata la vena porta surrenale. Sono a fondo trattati il tessuto interstiziale delle gonadi e le questioni fisiologiche, patologiche che vi si riannodano nel campo della sessualità e determinismo del sesso. Sono riguardati dati particolari, reperti e deduzioni concernenti l'epifisi e l'ipofisi, con considerazioni critiche. Viene ripresa la questione delle cellule chiare ed oscure delle isole del LANGERHANS fatte conoscere dall'A. ed i loro comportamenti in stati fisiologici e patologici. Si illustrano ricerche fatte sulla non esistenza nell'uomo di un ramo del nervo cocleare al vestibolo (ganglio e nervo di BÖTTCHER), trattandosi invece di un comportamento particolare dello stesso nervo vestibolare e del suo ganglio (ganglio di SCARPA). Viene, con larga sintesi di dati in confronto di quelli di altri, studiata e discussa la struttura della fibra nervosa, riportata a condizioni chimico-fisiche, in correlazione con quanto risulta dalla rigenerazione e dalla degenerazione walleriana, l'azione dei reagenti e delle onde corte.

## SULL' INTELLIGENZA DEGLI ANIMALI

*Nota del socio ordinario Giuseppe De Lorenzo*

(Adunanza del dì 5 dicembre 1953)

**Sunto.** — In questa Nota si indaga, sulla scorta di testimonianze storiche, letterarie e filosofiche, come, quando e dove, nel mondo antico e nel mondo moderno, nel mondo orientale e nell'occidentale, sia sorta e si sia svolta negli uomini la disparità di opinione sulla presenza o l'assenza di intelligenza negli animali; e si conclude, che gli animali sono, per l'intelligenza, solo quantitativamente, non qualitativamente, differenti dagli uomini.

In una seduta di laurea, di una trentina d'anni or sono, un candidato presentò una tesi di zoologia, nella quale parlava, tra altro, dell'intelligenza degli uccelli. Contro tale assunto insorse vivacemente il decano della Facoltà e professore di anatomia comparata, Antonio DELLA VALLE; il quale, sincero e pio credente, non ammetteva, che gli animali avessero intelligenza, attribuendo loro solo l'istinto. Io allora mi assunsi il patrocinio del laureando, cercando di dimostrare alla Facoltà, con argomenti anatomici, fisiologici e psicologici, che gli animali, per costituzione cerebrale, funzione sensoriale ed attività intellettuale, differiscono solo quantitativamente, non qualitativamente, da noi uomini; che siamo animali come tutti gli innumerevoli nostri progenitori, parenti, congiunti ed affini, se anche giunti all'apice della scala zoologica.

Da allora ho sempre pensato e ripensato sul come, sul quando e sul dove sia sorta tra gli uomini questa disparità di opinione sulla presenza o l'assenza dell'intelligenza negli animali; e sono giunto alla conclusione, che essa non esisteva nell'Europa antica, prima dell'avvento del Cristianesimo, e non esisteva e non esiste nella grande Asia, sia essa indoeuropea o mongolica; ma che il Cristianesimo, portando con sè, insieme con la sua pura dottrina di salvezza morale del Nuovo Testamento, anche le concezioni fisiche della vita e del mondo del Vecchio Testamento, ha prodotto nel nostro modo di pensare questa frattura tra mondo umano ed animale, riportandoci alla narrazione della *Genesi*; secondo la quale Dio creò l'uomo quale anima vivente, dandogli in potestà tutte le piante e tutti gli animali della terra. Tale frattura non esisteva nell'antica civiltà mediterranea egiziana, greca e romana; come non esisteva e non esiste nelle civiltà, indoeuropee e mongoliche dell'Asia, e specialmente dell'India.

A tale conclusione sono giunti anche molti pensatori moderni. Ne cito



solo due esempi, di contemporanei, di due punti opposti della terra. Uno è il dott. Albert SCHWEITZER, che meritamente ha avuto il premio NOBEL per la pace del 1953, e del quale mi sono già occupato nella mia Nota sull' *India nelle lettere di Pietro Della Valle*, pubblicata nel Rendiconto di questa Accademia il 4 novembre del 1950. Lo SCHWEITZER, nel suo libro *Les grands penseurs de l'Inde*, Paris, Payot, 1945, scrive: « Depuis que SCHOPENHAUER m'a révélé la pensée de l'Inde, celle-ci n'a cessé d'exercer sur mon esprit une forte attraction. J'ai toujours été convaincu, que toute pensée philosophique doit s'attaquer au grand problème de l'union spirituelle de l'homme avec l'univers. L'éthique indienne ne se soucie pas seulement des relations de l'homme avec son semblable et avec la société, mais aussi de son attitude envers tous les êtres. La pensée indienne aboutit à reconnaître ce principe, que la pensée européenne a trop souvent méconnu ». E questo principio, di comunanza e di affinità degli uomini con tutti gli esseri viventi, lo SCHWEITZER non solo lo ha fatto teoreticamente suo, ma lo ha applicato con la sua splendida vita di abnegazione e di sacrificio, che gli ha meritamente valso il premio NOBEL per la pace.

L'altro esempio moderno, tratto dalla parte opposta della terra, ci è fornito dal celebre scrittore cinese LIN YUTANG, il quale nella sua opera su *La saggezza dell'India*, Bompiani, 1953, scrive: « Secondo l'etichetta cinese, ho dato la precedenza alla saggezza dell'India su quella della Cina. L'India è stata maestra della stessa Cina, per quanto religione, filosofia e letteratura narrativa; ha insegnato al mondo la trigonometria, le equazioni, la grammatica e la fonetica; ci ha dato le *Mille e una notte* e le favole, degli animali; è stata maestra di filosofia al mondo; ha ispirato BOCCACCIO, GOETHE, HERDER, SCHOPENHAUER, EMERSON, e forse anche l'antichissimo ESOPO ». E con ciò LIN YUTANG già giustamente accenna alla parte importantissima, che l'India ha avuto nell'insegnare all'Asia ed al mondo la concezione dell'intima affinità, esistente tra la vita, il sentimento e l'intelligenza degli uomini e degli animali: parte, su cui ritornerò qui appresso, dovendo ora indicare, come ho già dianzi detto, la concezione della vita degli uomini e degli animali nelle antiche civiltà mediterranee, eurafricane, precristiane.

Tra tali civiltà mediterranee la più antica e veneranda è quella dello antico Egitto; presso la quale, come scrisse ERODOTO, gli antichi Greci andarono, come fanciulli, a scuola. E la civiltà egiziana ci dimostra quale comunanza ed affinità essa ammettesse tra uomini ed animali, sia nella vita che nella religione: nella figurazione del sommo dio, il sole, *Ra*, sotto forma di falco e di scarabeo stercorario; nell'aspetto teriomorfico delle sue numerosissime divinità, terrestri, celesti e fluviali, sotto forme di corpi umani con teste di animali, sciacalli, scimie, falchi, ibis, etc.; nelle Sfingi con testa umana e corpo leonino; nell'adorazione del bue Api e di altri animali; nella mummificazione dei cadaveri, non solo degli uo-

mini, ma anche degli animali, domestici e selvatici, cani, gatti, coccodrilli, icneumoni, etc.; e, soprattutto, nella dottrina della metempsirosi, per cui era ammessa, come articolo di fede, la transmigrazione delle anime dai corpi degli animali in quelli degli uomini, e viceversa: per cui uomini ed animali erano messi, metafisicamente e fisicamente, alla pari.

A tale contaminazione, o pretesa contaminazione, animale-umana-divina, resistette incrollabilmente il rigido monoteismo del popolo ebraico esule in Egitto, mantenuto da MOSE nell'adorazione e nella fede del suo unico dio *Yahve*, senza alcuno altro iddio. Ma quando, *in exitu Israel de Aegypto*, il popolo ebraico, dopo aver passato il Mar Rosso, giunse al Sinai, e MOSE ascese il monte, per ricevervi da Dio la rivelazione della Legge, il popolo stesso rimpianse non solo le cipolle, ma anche gli dei d'Egitto: sì che, quando MOSE discese dal monte con le tavole della Legge, trovò che il suo popolo, con a capo suo fratello AARON, adorava, danzando, un vitello d'oro, fabbricato da AARON stesso, con le offerte dei monili d'oro del popolo, a simiglianza del bue Api egiziano. A tale vista MOSE arse di sdegno, spezzò le tavole della Legge ed ingiunse ai figliuoli di LEVI: « Passate e ripassate per il campo, ed uccidete ciascuno il suo fratello, il suo amico, e il suo prossimo parente idolatra. Ed i figliuoli di LEVI fecero secondo la parola di MOSE; ed in quel giorno caddero morti del popolo circa tremila uomini. » Dello stesso sdegno arse perfino il Signore, quando vide, che SALOMONE, il più grande ed il più saggio dei re d'Israele, per far piacere alle donne straniere, tra le sue trecento mogli e settecento concubine, si era lasciato andare ai loro culti idolatrici, e « perciò il Signore si adirò contro SALOMONE, perchè il suo cuore si era sviato dal Signore Iddio d'Israele »; il quale non ammetteva altro Dio innanzi a sè, e tanto meno l'abominio del culto di animali o divinità teriomorfiche.

Dopo circa un millennio l'eco di tale sdegno risuona nella prima *Epistola ai Romani* di san PAOLO: « Et mutaverunt gloriam incorruptibilis Dei in similitudinem imaginis corruptibilis hominis, et volucrum, et quadrupedum, et serpentium ». E sulle orme di san PAOLO si avanzò poi il grande santo AGOSTINO. Così si è avverata nella civiltà occidentale cristiana, e nella islamica, la grande frattura tra il mondo umano ed il mondo animale; che, come ho già detto, non esisteva nelle civiltà mediterranee precristiane e non esiste nelle civiltà della grande Asia, tanto indoeuropee che mongoliche.

A differenza di questo, che ho qui detto, l'antica civiltà egiziana influì potentemente sull'antica civiltà greca; specialmente per la credenza nella metempsirosi, che probabilmente s'infiltrò nei misteri orfici, e certamente informò la filosofia di EMPEDOCLE e la dottrina di PITAGORA: verso le quali contemporaneamente confluirono le dottrine indiane, brahmaniche e buddhistiche, sulla palingenesi o rinascita degli esseri, at-

traverso il giro infinito delle nascite e delle morti, o *samsâro*, nella identità della vita universale, condensata nella formula: questo sei tu, *tat tvam asi*. Tali influenze e confluenze furono facilitate dalla grande espansione del possente regno persiano degli Achemenidi, che tra il sesto ed il quinto secolo avanti Cristo si stendeva dall' India e dall' Asia centrale, per l' Asia minore e l' Egitto, fino all' Etiopia, e che introdusse in Occidente anche la concezione di ZARATHUSTRA, del principio dualistico del bene e del male nel mondo, di Ormuz e di Arimane, Dio e Satana. E l' impero di ALESSANDRO e dei suoi successori completò quest' opera di unificazione e di amalgama delle concezioni egiziane ed indiane con quelle dell' antica Grecia, dando origine alle espressioni palingenetiche di PINDARO e di PLATONE. Ne fanno prova archeologica le tre laminette d' oro del quarto secolo avanti Cristo, scoperte nei sepolcreti pitagorici presso Sibari, e conservate nel Museo Nazionale di Napoli; nelle quali quei morti proclamano il desiderio, di sfuggire al dolore del mondo e riposare in pace eterna: con espressioni come « sciogliersi dal giro e riposare dalla miseria » o « sfuggire dal giro della vita, pieno di dolore, carico di miseria »; nelle quali è riprodotto letteralmente il concetto del *samsâro* indiano, del giro, infinito e doloroso, della vita e della morte, e della beata estinzione del *nirvâna*.

Tale influenza del pensiero indiano non si fermò all' antico mondo greco, ma, mediante questo, passò, come qui appresso vedremo, nel mondo romano, specialmente per opera di grandi poeti, quali LUCREZIO, VIRGILIO, OVIDIO, e quindi nel mondo medioevale e moderno; determinando, nella cultura occidentale cristiana, una corrente di pensatori e di pensieri, per ciò che riguarda la concezione dei rapporti, fisici e psichici, tra uomini ed animali, in contrasto con la maggiore corrente della netta distinzione tra gli uni e gli altri, ereditata dal Vecchio Testamento, attraverso il Cristianesimo. A ciò contribuì potentemente la vistosa ed attraente fioritura dell' immenso albero di conti, apologhi, favole, novelle, ballate, romanze e romanzi; il quale, affondando le sue radici nel suolo dell' India, ha steso i suoi rami per tutta l' Asia, l' Africa e l' Europa: innestandosi ivi con le piante affini, germinate autoctonamente nel folklore di tutte le terre dell' antico continente. L' espansione millenaria di tale albero spirituale indiano trova quasi il suo simbolo nell' espansione, pur essa millenaria, dell' albero effettivo indiano, chiamato dai botanici *Ficus religiosa*, detto *ashvattha* in sanscrito, *assattha* in pâli, albero di *banian* o *banyan* (da non confondersi con la pianta di banano, o *Musa sapientum*) in indiano moderno ed inglese, e venerato dai buddhisti come albero di *Bo* o di *Bodhi*, ossia dell' illuminazione, o del risveglio: come quello al cui piede, in Gayâ, 2500 anni or sono, Gotamo raggiunse il risveglio, od illuminazione, ed assunse quindi il titolo di *Buddha*, ossia Svegliato od Illuminato. Tale albero ha la proprietà, che i suoi rami penduli si affondano nel terreno, vi mettono radici e ne fanno germogliare nuovi tronchi:



così che l'albero stesso rinasce *alius et idem* ed acquista una certa immortalità nel tempo, espandendosi ampiamente nello spazio ed accogliendo sotto la sua vasta ombra carovane di mercanti e di pellegrini e costruzioni di santuari e di templi. Così che ancor oggi esiste a Buddhagayâ, *alius et idem*, l'albero, al cui piede si assise Buddha a meditare: come ne esistono ancora ad Anuradhâpura, l'antica capitale dell'isola di Seilan, i rampolli, che furono là trapiantati, per disposizione dell'imperatore ASOKA, nel terzo secolo avanti Cristo.

Parimenti antica di due millenni e mezzo, se anche abbia oscure radici preistoriche, plurimillinarie, è la prima novellistica indiana, a noi nota, divenuta poi novellistica ariana od indoiranica, e quindi indoeuropea, indosemitica ed indomongolica. A tale antichità, infatti, risale, press'a poco, il *Jâtaka*, o narrazione delle centinaia di rinascite, in forme vegetali, animali ed umane, attraversate dal Bodhisatta, prima di incarnarsi nel Buddha SAKYAMUNI: un tesoro di mille apologhi, conti, novelle, rapsodie, favole e favole in versi, intessute con prosa, chiamato da Georg BÜHLER il grande *thesaurus* dell'antichità indiana quotidiana, e che è al tempo stesso la leggenda popolare del Maestro, che tutto conosceva, perchè tutto aveva vissuto nel corso di tempi innumerabili. Ed E. CHAVANNES, nei suoi *Cinq cent contes et apologues du Tripitaka Chinois* (Paris, 1910-11) non esita a proclamare che essi, con le loro ramificazioni, sono *le plus vaste receptacle de contes qu'il y ait eu au monde*; facendo così convertire alla teoria dell'origine indiana dei conti anche l'antico ed appassionato folklorista Joseph BÉDIER.

Tale originarietà ed originalità dei conti indiani si può particolarmente osservare nelle favole degli animali, nelle quali la vita, la psicologia e gli usi ed i costumi degli animali sono osservati e rappresentati in modo assai più conforme a natura che nelle corrispondenti favole occidentali: a cominciare da quelle di ESOPPO, di FEDRO e di BABRIO, passando per i *fabliaux* medioevali fino alle ultime favole di LA FONTAINE. Prova ne sia, per esempio, l'assurda sostituzione, già notata dal KELLER, della volpe, o *rénard* o *Reinecke*, allo sciacallo, nelle sue relazioni con il leone, e la non meno assurda sostituzione, osservata dall'entomologo FABRE, della cicala al grillo, in rapporto con la formica. Autoctone europee, invece, e più conformi a natura, sono le relazioni tra la volpe, *Renart-Reinecke*, ed il lupo grigio, *Isengris*, quali sono esposte nelle narrazioni occidentali dal *Roman de Renart* medioevale fino al *Reinecke Fuchs* di GOETHE, e quali io nella mia infanzia le ascoltavo estatico raccontare, come storie di comare volpe e compare lupo, tratte dal folklore popolare, nelle sere d'inverno accanto all'avito focolare, tra le mie native montagne lucane, coperte di neve. Karl Eugen NEUMANN, in una nota al XXIV *sutta* della sua traduzione del *Dighanikâyo*, fa notare, come finemente gli Indiani abbiano intuito e riprodotto il linguaggio degli animali, e cita, a questo proposito, quel che



PORFIRIO (il quale era, come APULEIO, imbevuto di sapienza gangetica) scrive nel terzo libro della sua opera sul *Non uccidere gli animali*, quasi anticipando gli ultimi risultati delle moderne ricerche scientifiche: « La natura a tutti gli animali, cui diede senso e comprensione, ha dato anche intelligenza, e perfino un linguaggio, interno ed esterno. E così APOLLONIO di Tyana, MELAMPO, TIRESIA e TALETE hanno potuto distinguere ed intendere le espressioni degli animali. E non dobbiamo meravigliarci, se non le intendiamo, come non comprendiamo le lingue della maggior parte dei popoli. Gli animali, quindi, hanno intelligenza e non si possono perciò distinguere dagli uomini, se non in quanto tale intelligenza negli animali è limitata e negli uomini sempre più sviluppata ». Il che si accorda con quel che scrive KANT nel § 89 della *Critica del giudizio*, opponendosi alla concezione di CARTESIO, che considerava gli animali come macchine, e dichiarando che gli animali, malgrado le loro differenze specifiche, sono, quali esseri viventi, ed agenti per motivazioni cerebrali, tutta una cosa, *par ratio*, con gli uomini. Così si comprende la comunanza di sentimenti, di pensieri e di azioni, tra gli animali e gli uomini, com'è rappresentata nella novellistica indiana e nelle sue ramificazioni sulla terra.

Tale comunanza si può dire che sia un fenomeno caratteristico ed originario dell'India: perchè quella terra portentosa, chiusa tra le più alte montagne del globo, sedi del freddo e della neve (come significa in sanscrito la parola *Himālaya*), e l'oceano più caldo del nostro pianeta, percorsa da fiumi gonfi dell'acqua, precipitante da quei monti a quel mare, coperta dalla densa giungla, o giāngala, in cui si agita la più intensa vita animale, con le forme quasi preistoriche degli elefanti e dei rinoceronti, i grandi carnivori, quali le tigri ed i leopardi, gli svariati erbivori, dai grandi e fieri bovi e bufali alle piccole e timide antilopi e gazelle, ed il popolo immenso degli uccelli e quello non meno immenso dei rettili, dai coccodrilli e dagli immani pitoni fino alle velenosissime naje, e l'innunerevole aliare e formicolare degli insetti, tra cui debbono vivere i suoi quattrocento milioni di uomini: quella terra, dico pare fatta apposta, per mettere nel più intimo contatto il mondo vegetale ed animale col mondo umano. Ed in tale intimo contatto gli Indiani da più di tremila anni hanno costantemente seguito verso gli animali il precetto della benevolenza o, meglio, della non nocenza, *ahimsā*; che GANDHI avrebbe voluto pure istituire nelle relazioni tra uomini ed uomini, e non v'è riuscito: perchè *homo homini lupus*. Ma la *ahimsā* spiega l'intima comprensione degli animali da parte degli Indiani, e ci dà quindi ragione dell'origine della favolistica indiana, diffusasi poi per tutta la terra.

I modi e le vie di diffusione della novellistica indiana sulla terra sono stati di recente indicati e riassunti, sulla scorta delle anteriori ricerche, specialmente di quelle di BENFEY e di HERTEL, nella monumentale opera in dieci volumi, *The Ocean of Story, being C. H. Tawney's translation of*

*Somadeva's Kathâ Sarit Sâgara, or ocean of streams of story, now edited with introduction, fresh explanatory notes and terminal essay*, by N. M. PENZER (1924-28), e nella eccellente *Geschichte der indischen Litteratur* di M. WINTERNITZ, Leipzig, 1920. È veramente meraviglioso, dice il WINTERNITZ, come la materia della novellistica indiana sia migrata di popolo in popolo, in modo che ci imbattiamo tra quasi tutti i popoli d'Europa e d'Asia, e perfino d'Africa, in racconti di favole, di cui la patria originaria è stata l'India. E sono non solo storie, trasmesse oralmente da viaggiatori, mercanti, guerrieri e pellegrini, ma interi libri, tradotti nelle lingue di diversi popoli. E, sebbene i progressi dell'antropologia e dell'etnologia abbiano dimostrato, che l'India non è la patria di tutti i racconti, pure resta sempre vero, che una parte di molti tra di essi, tra i più diversi popoli, ha avuto origine nell'India. Basta pensare alle peregrinazioni del famoso *Pancatantra*, tradotto verso il 750 in arabo da Abdallah ibn AL-MOQAFFA sotto il titolo di *Kalila e Dimna*, e poi in persiano nel 1142, e, prima ancora, in ebraico, e di qui, tra il 1263 ed il 1278, da Giovanni DA CAPUA, in latino, *Liber Kalilae et Dimnae*, e poi in tedesco, olandese, danese, islandese, nonchè in italiano nei *Discorsi degli animali ragionanti tra loro* di Agnolo FIRENZUOLA, del 1548, e nella traduzione del DONI, con la traduzione francese, del 1556, ed inglese, del 1570; senza contare il *Novus Esopus* dell'italiano BALDO, verso il 1200, e la traduzione spagnuola dall'arabo, pure di quel tempo, e le numerosissime traduzioni in lingue asiatiche, turche, georgiane, ciagataiche, grusiche e perfino malesi. A ciò si aggiungano le derivazioni e le varianti, accolte nelle narrazioni medioevali, come i *Gesta Romanorum*, che trovarono la loro eco anche in SHAKESPEARE, e la *Disciplina clericalis* di Petrus ALPHONSUS. del 1100, ed i *fabliaux* francesi ed infine le opere dei maestri dell'arte del racconto, quali BOCCACCIO, SACCHETTI, STRAPAROLA, CHAUCER, fino al *Cunto de li cunti* di G. B. BASILE ed a LA FONTAINE e PERRAULT, anzi fino ai *Kinder-und Hausmärchen* dei fratelli GRIMM. Né si può tacere la storia della vita leggendaria del BUDDHA, qual'è esposta nel *Lalitavistara*; che, tradotta prima in pehlevi tra il sesto e il settimo secolo, e poi riprodotta, con trasformazioni, in arabo, siriano, etiopico, greco e latino, come storia di *Barlaam e Josafat*, finì col fare entrare questi nomi, che sono le corruzioni di *Bhagavân Bodhisat*, nell'agiologia cristiana, e propriamente nel *Catalogus Sanctorum*, di PETRUS DE NATALIBUS.

Così, attraverso circa due millenni si svolge questa minore corrente di pensieri sulla parentela, in ogni senso, tra uomini ed animali: corrente che attinge, come qui appresso vedremo, vette supreme, quali quelle di SHAKESPEARE, e che sprizza anche e scintilla in ingegni vivissimi, come quello di VOLTAIRE, che aveva col suo genio intuito il grande valore del pensiero indiano ed orientale sulla nostra cultura occidentale: e non per i nuovi studi orientalistici, che egli non poteva ancora conoscere, nè per

le anteriori relazioni dei viaggiatori italiani, che qui appresso indicherò, ma solo per quel che aveva appreso da ARRIANO e da PLUTARCO, sulla spedizione di ALESSANDRO in India, e dagli scrittori e filosofi alessandrini. Per darne un esempio, tra tanti altri, basta rileggere il seguente pezzo del *Dialogue entre le chapon et la poularde*. La pollastra, atterrita ed inferocita per la sorte loro fatta dagli uomini, di essere castrati, acccati ed ingrassati, per poi sgozzarli, arrostarli e mangiarli, chiede al cappone, se questa è l'usanza fra tutti i popoli della terra. Il cappone risponde che no, « que dans un pays nommé l' *Inde*, beaucoup plus grand, plus beau, plus fertile que le nôtre, les hommes ont une loi sainte, qui depuis de milliers d'années leur defend, de nous manger; que même un homme nommé PYTHAGORE, ayant voyagé chez ces peuples justes, avait rapporté en Europe cette loi humaine, qui fut suivie par tous ses disciples. Ont doit lire PORPHYRE le pythagoricien, qui a écrit un beau livre contre les broches. Oh le grand-homme! le divin homme que ce PORPHYRE! avec quelle sagesse, quelle force, quel respect tendre pour la divinité, il prouve que nous sommes les alliés et le parens des hommes, que Dieu nous donna les mêmes organes, les mêmes sentimens, la même mémoire, le même germe inconnu d'ententement, qui se developpe dans nous jusq' au point déterminé par les lois éternelles, et que ni les hommes ni nous passons jamais. En éfet, ma chère poularde, ne serait-ce pas un outrage à la divinité, de dire que nous avons des sens pour ne point sentir, une cervelle pour ne point penser? Cette imagination digne d'un fou nommé DESCARTES, ne serait-elle pas le comble du ridicule, et la vaine excuse de la barbarie? ». Come si vede, VOLTAIRE aveva perfettamente intuito, attraverso PORFIRIO, il principio della identità della vita universale, espresso nelle *Upanisciade* con la formula « questo sei tu, *tat tvam asi* », e la legge indiana della non violenza, o non nocenza, *ahimsa*: senza conoscere l'*Oupnek'hat*, che ANQUETIL DUPERRON dovrà pubblicare quasi mezzo secolo dopo, nè le anteriori relazioni dei viaggiatori italiani, che già avevano ampiamente descritto la *ahimsa* indiana.

Tra gli italiani, i quali, dopo la caduta dell'impero romano, contribuirono a far conoscere l'Oriente all'Occidente, il primo, anzi il principe, per la ricchezza e l'esattezza delle notizie da lui date, è, senza dubbio, MARCO POLO. Come con le sue descrizioni delle magnificenze e degli splendori della Cina e del Giappone egli accese in CRISTOFORO COLOMBO, già consapevole della sfericità della terra, l'ardore di *buscar el levante por el poniente*, e lo portò quindi, senza che se ne accorgesse, a scoprire un nuovo continente, che doveva poi da un altro italiano prendere l'alto e sonante nome di America: così MARCO POLO, dopo che per più di un millennio era sceso sull'Occidente un velo di silenzio sulle rivelazioni orientali degli scrittori alessandrini, schiuse di nuovo all'Europa i misteri delle civiltà e delle culture dell'Asia, e descrisse con insuperata chiarezza alcune



forme di purezza, sapienza e santità delle manifestazioni civili e religiose dell' India.

MARCO POLO era nato, come si sa, nel 1254 a Venezia. All'età di 17 anni, nel 1271, si recò, insieme con gli zii Nicolò e Matteo, attraverso l'impervia Asia centrale, alla corte di KUBLAI KHAN, in Cina, dove giunsero nel 1275 e vi rimasero fino al 1292; quando intrapresero il ritorno, questa volta per mare, lungo le coste della Cina, dell'Indocina e dell'India ed attraverso la Persia e l'Asia Minore, finchè giunsero nel 1295 a Venezia. Qui si trovò coinvolto nella guerra tra Venezia e Genova e, fatto prigioniero nella battaglia della Curzola, il 7 settembre 1298, fu tradotto nelle carceri di Genova, dove tra il 1298 ed il 1299 dettò ad un suo compagno di prigionia, RUSTICHELLO da Pisa, in un francese venezianizzato, la narrazione dei suoi viaggi; di cui egli stesso poi nel 1307, quando era da sette anni libero, diede una copia corretta a Thibault DE CEPOY. Ma essa era già nota e tradotta in varie redazioni italiane: come ne fa fede il codice magliabechiano II, IV, 88 « scritto a Firenze da Michele ORMANI, quale morì negli anni di Cristo mille trecento nove ».

Togliamo da essa solo quello che riguarda l'India. Anzitutto egli descrive i brāhmani, come ancor oggi non si potrebbero meglio descrivere. « E di questa provincia son nati i bregomanni e di là vennero primamente. E sì vi dico che questi bregomanni sono i migliori uomini e gli più leali del mondo che giammai non direbbono bugia per veruna cosa al mondo. E non mangiano carne nè beono vino, e istanno in molta grande astinenza e onestade, e non toccherebbero altra femmina che la loro moglie, nè non ucciderebbero verun animale, nè non farebbono cosa onde credessono aver peccato. Tutti gli bregomanni sono conosciuti per un filo di bambagia, ch'egli portano sotto la spalla manca, e sì che gli viene il filo a traverso il petto e le spalle. » Dopo aver così indicato il *brahmacārya* e la *ahimsā* dei brāhmani, passa a descrivere, con non minore esattezza, le manifestazioni ascetiche dei *yogi* o penitenti nudi o gimnosofisti, jainisti: « E questi regolati si chiamano *cuiqui*... e vanno tutti ignudi senza coprire loro natura, e non mangiano nè in taglieri nè in iscodelle, ma in su foglie di certi alberi, secche e non verdi, che dicono che le verdi hanno anima, sì che sarebbe peccato. Ed eglino si guardano di far cosa onde eglino credessono aver peccato: innanzi si lascerebbono morire. E quando son domandati: Perchè andate voi ignudi? E quei dicono: Perchè in questo mondo noi non recammo nulla, e nulla vogliamo di questo mondo... E ancora vi dico, che costoro non ucciderebbero veruno animale di mondo, nè pulce, nè pidocchi, nè mosca nè veruno altro, perchè dicono ch'egli hanno anima. Ancora non mangiano veruna cosa verde, nè erbe, nè frutti, infino tanto che eglino non sono secchi, dicono anche che hanno l'anima. Egli dormono ignudi in su la terra, nè non toccherebbono nulla, nè sotto nè addosso: e tutto l'anno digiunano e non mangiano se non pane e acqua ».



Dopo aver così descritto queste estreme forme di mortificazione, che vigono ancor oggi da millenni nell' India e che già due millenni e mezzo fa erano state solennemente riprovate dal Buddha SAKYAMUNI, il nostro MARCO POLO imprende a narrare in maniera veramente mirabile la vita leggendaria dello stesso SAKYAMUNI Buddha, che egli chiama SAGAMONI Borgan secondo la pronunzia mongolica: della sua nascita regale, della sua vita di giovinezza, tra gli agi, il lusso e la voluttà, lungi dalle miserie e dai dolori del mondo, finchè, venuto a contatto col mondo ed avendo visto in esso regnare vecchiezza, malattia, affanni, dolore e morte, « questo giovine si ritirò al palagio e disse, che non voleva più restare in questo misero mondo, ma disse che voleva cercare quello che mai non moriva nè non invecchiava... e incontanente si partì da questo palagio e andonne su alta montagna, molto rimota, e quivi dimorò poscia tutta la sua vita molto onestamente: chè per certo, s' egli fosse istato cristiano battezzato, egli sarebbe stato un gran santo appo Dio ». E non si potrebbe, certo, esporre con più brevità ed esattezza la vita, la concezione del mondo e la santità del BUDDHA.

Ora questa narrazione di MARCO POLO che, come ho cercato il dimostrare nel mio libro *India e Buddismo antico*, 5ª ed., Bari, Laterza, 1926, pare quasi una traduzione letterale di antichi testi indiani, tradotti anche in cinese, doveva essere nota a DANTE; il quale conosceva tutto il conoscibile dei suoi tempi. Solo così si spiega il dubbio, ch' egli si pone nel canto XIX del *Paradiso*, descrivendo un santo dell' India:

Un uom nasce alla riva  
Dell' Indo, e quivi non è chi ragioni  
Di Cristo, nè chi legga, nè chi scriva:  
E tutti i suoi voleri ed atti buoni  
Sono, quanto ragione umana vede,  
Senza peccato in vita ed in sermoni.  
Muore non battezzato e senza fede:  
Ov' è questa Giustizia che il condanna?  
Ov' è la colpa sua, se ei non crede?

Nella quale ultima terzina DANTE pare che pigli le mosse proprio dalle ultime su citate parole di MARCO POLO riguardanti Buddha: « Che per certo, s' egli fosse istato cristiano battezzato, egli sarebbe stato un gran santo appo Dio ». Ma la Giustizia risolve il dubbio di DANTE, rispondendogli con la voce dell' aquila:

Ma vedi! molti gridan "Cristo! Cristo!"  
Che saranno in giudizio assai men *prope*  
a Lui, che tal che non conosce Cristo.

E qui veramente DANTE, con uno dei suoi formidabili colpi d'ala d'aquila,

spazza via dal cielo sereno della santità ogni nube di ristrettezza e di intolleranza religiosa e mette alla pari, nel campo morale, il Buddismo col Cristianesimo, l'Oriente con l'Occidente.

Due secoli e più dopo MARCO POLO viaggiava per l'India un fiorentino, Andrea CORSALI, che ne ritornò nell'ottobre del 1516. Il CORSALI riferì del suo viaggio in due lettere, una diretta a Giuliano e l'altra a Lorenzo de' MEDICI, riprodotte poi dal RAMUSIO e tradotte in francese da Gabriel SYMEON. Il RICHTER nella sua opera *The literary Works of Leonardo da Vinci*, London, 1883, riporta dalla lettera a Giuliano de' MEDICI il passo seguente: « Alcuni gentili chiamati Guzzarati non si cibano di cosa alcuna che abbia sangue, nè fra essi loro consentono che si nocchia ad alcuna cosa animata, come il nostro LEONARDO da Vinci ». Come dunque MARCO POLO con la sua descrizione della santità del Buddha quasi certamente influì sullo spirito grande di DANTE: così il CORSALI, osservando nell'India la concezione e la pratica della non-nocenza, o *ahimsâ*, verso tutti gli animali, corse subito col pensiero all'altro grande italiano, LEONARDO da Vinci; il quale, come san FRANCESCO d'Assisi, aveva amore e compassione per tutti gli esseri viventi.

Con la menzione di LEONARDO da Vinci e di san FRANCESCO d'Assisi giungiamo a quella minoranza, cui dianzi accennavo, di pensatori occidentali, i quali, andando contro la generale corrente cristiana, d'origine semitica, hanno intuito, che la vita degli animali è, nella sua essenza, pari alla vita degli uomini; e che anche la loro intelligenza è egualmente pari di qualità, se non di quantità, all'intelligenza degli uomini. Darò di tali pensatori alcuni esempi, tratti dai popoli, che hanno maggiormente contribuito alla formazione della civiltà e della cultura occidentale: l'italiano, il francese, l'inglese e il tedesco.

In Italia abbiamo il singolare fenomeno di due figure somme, accomunate nell'eguale comprensione e benevolenza per gli animali, ma, per tutto il resto, diversissime l'una dall'altra, anzi l'una opposta all'altra: l'irreligioso, laico e scientifico LEONARDO da Vinci, ed il religiosissimo, santissimo e mistico san FRANCESCO d'Assisi.

LEONARDO, figlio dell'esperienza, come egli stesso si chiama, aveva della vita e del mondo una concezione pagana: simile a quella di ERACLITO, EPICURO, LUCREZIO: di cui spesso ripete, consapevolmente od inconsapevolmente, i pensieri. Così, per esempio, egli scrive: « L'omo e li animali sono proprio transito e condotto di cibo, sepoltura di animali, albergo di morti, facendo a sè la vita dell'altrui morte »; che è lo stesso pensiero di ERACLITO, di tutti noi, mortali immortali, viventi della morte degli altri, morienti per la vita degli altri. E di ERACLITO ha anche la stessa concezione dell'eterno fluire della vita: « L'acqua, che tocchi nei fiumi, è l'ultima di quella che andò e la prima di quella che viene: così il tempo e la vita presente ». E non solo l'acqua, ma anche la fiamma è per lui il simbolo

dell'eterno divenire, della continua rinascita, come lo *stirb und werde* di GOETHE: « Guarda il lume e considera la sua bellezza. Batti l'occhio e ri-guardalo: ciò che di lui tu vedi, prima non era, e ciò che di lui era, più non è. » E questa è la stessa immagine, che, per spiegare il continuo giro della nascita e della morte, il monaco buddhista NĀGASENO espone, nel *Milindapañha*, al re greco MILINDA o MENANDRO, uno dei successori di ALESSANDRO, che regnò nell'India settentrionale dal 130 al 100 avanti Cristo: « Come in una lampada, che arde tutta la notte, il lume è lo stesso e diverso, *alius ed idem*, perchè l'olio ed il lucignolo sono di continuo consunti, mentre la fiamma permane: così è la continuità degli esseri, di cui ciascuno, mentre trapassa, rinasce con quasi simultanea rinascita. » *Et quasi cursores vitae lampada tradunt*, ci dice egualmente LUCREZIO. E con LUCREZIO, e con il Buddha SAKYAMUNI, egualmente LEONARDO vede l'origine prima del continuo rinascere nel desiderio e nella sete di essere, o di divenire, da cui è animata ogni cosa della natura: « Ogni cosa naturalmente *desidera* mantenersi in suo essere... Universalmente tutte le cose *desiderano* mantenere la loro natura... Ogni peso *desidera* cadere al centro per la via più breve... L'anima *desidera* stare nel suo corpo... » E di tale desiderio o volontà di vivere, LEONARDO dà questa mirabile favoletta: « La formica, trovato un grano di miglio, il grano, sentendosi preso da quella, gridò: Se tu mi fai tanto piacere, di farmi fruire *il mio desiderio di nascere*, io ti renderò cento me medesimi. E così fu fatto ». Malgrado, però, tale profonda concezione della vita e del mondo, LEONARDO vuol sempre restare nel campo della possibile esperienza, senza abbandonarsi a speculazioni metafisiche: « E se noi dubitiamo di ciascuna cosa, che passa per li sensi, quanto maggiormente dobbiamo noi dubitare delle cose ribelli a essi sensi, come dell'essenza di Dio e dell'anima, e simili, per le quali sempre si disputa e contende. » Ed applica subito tale suo principio alla considerazione dell'ingegno nell'uomo e negli animali: « L'omo ha grande discorso, del quale la più parte è vano e falso; li animali l'hanno più piccolo, ma è utile e vero; e meglio è la piccola certezza, che la gran bugia. » E con ciò indica concisamente, ma chiaramente, la differenza di quantità, non di qualità, tra l'intelligenza degli animali e quella degli uomini. I quali sono anch'essi animali, come tutti gli altri, di cui indica i più prossimi: « La descrizione dell'omo, nella quale si contengono quelli, che son quasi di simile specie, come babbuino, scimmia e simili, che son molti... e la descrizione dei movimenti delli animali a quattro piedi, infra li quali è l'omo, che anche lui nell'infanzia va con quattro piedi. » Bastano questi pochi pensieri di LEONARDO, per comprendere il ricordo, che il viaggiatore CORSALI ha di lui nell'India, come ho dianzi riportato, e quel che di lui scrive il VASARI, nella sua efficacissima prosa: « Dolsè la perdita di LEONARDO fuor di modo a tutti quegli che l'avevano conosciuto, perchè mai non fu persona, che tanto facesse onore alla pittura. Egli con lo splendore del-



l'aria sua, che bellissima era, rasserenava ogni animo onesto, e con le parole volgeva al sì e al no ogni indurata intenzione. Egli con le forze sue riteneva ogni violenta furia, e con la destra torceva un ferro di cavallo, come se fosse di piombo. Con la liberalità sua accoglieva e pasceva ogni amico, povero e ricco, pur che egli avesse ingegno e virtù... tirava a sè gli animi delle genti e molto si diletto di tutti gli animali, i quali con grandissimo amore e pazienza governava: e mostrollo, che spesso, passando dai luoghi dove si vendevano uccelli, di sua mano cavandoli di gabbia e pagandoli a chi li vendeva il prezzo che n'era chiesto, li lasciava in aria a volo, restituendoli la perduta libertà. Laonde volle la natura tanto favorirlo, che dovunque e' rivolse il pensiero, il cervello e l'animo, mostrò tanta divinità nelle cose sue, che nel dare la perfezione di prontezza, vivacità, bontade, vaghezza e grazia, nessun altro mai gli fu pari. » L'episodio degli uccelli corrisponde quasi letteralmente a quel che il nostro viaggiatore Pietro DELLA VALLE scriveva dall'India al suo amico SCHISANO in Napoli, il 18 dicembre 1617: « Gli Indiani più osservanti e più rigorosi non mangiano nè uccidono cosa vivente: anzi hanno per grandissimo peccato fin d'ammazzare gli animali immondi, come pulci e simili altri animali infesti all'uomo; e li pigliano con due dita, con la maggior gentilezza possibile, e pian piano li posano in terra, acciocchè non si rompano il collo nella caduta. E stimano opera tanto buona e santa, il dar vita e libertà agli animali, che bene spesso comprano molto cari gli uccelli, che altri tiene in gabbia, e quelli che son presi da cacciatori per mangiarli, solo per liberarli dalla morte, e dar loro, come fanno, la libertà. » Il ritratto poi, intellettuale e morale, di LEONARDO, dipinto dal VASARI, è quasi come un *pendant* profano del ritratto sacro di san FRANCESCO D'ASSISI.

San FRANCESCO, partendo da un principio religioso mistico, diametralmente opposto a quello di LEONARDO, era giunto, per la comprensione e l'amore per gli animali, allo stesso punto, a cui, per altra via, giungerà, dopo tre secoli, LEONARDO da Vinci. La concezione della vita e del mondo di san FRANCESCO, e l'applicazione, che egli ne fece alla sua stessa vita, fanno di lui, come già molti studiosi hanno dimostrato, più un *sannyâsin* indiano che un santo cristiano. E pare, che il grande genio di DANTE avesse intuito questa origine arcana, quando, ricordando Assisi, luogo di nascita del Santo, cantò che ivi

nacque al mondo un sole,  
Come fa questo talvolta di Gange;  
Però, chi d'esso loco fa parole,  
Non dica Ascesi, chè direbbe corto,  
Ma Oriente, se proprio dir yuole.

Ad indicare questa affinità orientale, indiana, gangetica, basta confrontare il sublime *Cantico del sole*, con le invocazioni per tutte le creature, spe-



cialmente per lo frate sole, per sora luna e le stelle, per frate vento, e per sora nostra morte corporale, da la quale nullo homo vivente po' scappare: basta confrontarle dico, con le analoghe invocazioni del poeta indiano BHARTRIHARI, del sesto secolo dopo Cristo, ossia sei secoli prima di san FRANCESCO, che suonano quasi letteralmente eguali: O madre terra, padre cielo, amico fuoco, sora acqua, frate vento, supplice ed a mani giunte vi prego, che, mondato d'ogni stoltezza e purgato d'ogni colpa, io possa tra le lucide fiamme flagranti dissolvermi nel gran tutto ». Come si vede, è lo stesso spirito, che urge BHARTRIHARI a dissolversi, attraverso il fuoco, nel gran tutto, ed induce san FRANCESCO morente a farsi deporre nudo sulla nuda terra, per trapassare, attraverso di essa, in Dio. Ben a ragione, quindi, SCHOPENHAUER, nel 48° capitolo del secondo volume del suo *Mondo come volontà e rappresentazione* scriveva: « Il passaggio di san FRANCESCO dal benessere alla vita di mendicante è perfettamente simile al passo, anche più grande, del Buddha SAKYAMUNI da principe a mendicante, e quindi la vita, così come l'Ordine, di FRANCESCO è una specie di sannyasismo, o di monachismo buddhistico. E si deve anche rilevare, che la sua affinità con lo spirito indiano appare anche nel suo grande amore per gli animali ed il frequente contatto con essi, che egli chiama sempre suoi fratelli e sorelle; come anche il suo bel *Cantico*, con le laudi del sole, della luna, delle stelle, del vento, dell'acqua e del fuoco, rivela il suo innato spirito indiano ». L'amore ed il consorzio di San FRANCESCO con tutti gli animali, e specialmente con gli uccelli, e più particolarmente ancora con le aeree e musicali allodole, sono descritti in molti racconti, narrati con ingenuo candore nei *Fioretti* e nelle due *legendae* di fra TOMASO da Celano. Ma il Santo, che pure ebbe tanta dimestichezza ed amicizia col ferocissimo lupo di Agobio, faceva qualche eccezione per alcuni insetti troppo interessati; come, per esempio, le mosche e le formiche. Soleva chiamare *frate Mosca* un frate dell'Ordine, restio a chiedere l'elemosina, ma avido e ghiottone alla mensa conventuale; e qualunque persona, che pensasse troppo al proprio interesse. Questa poca simpatia di san FRANCESCO per le mosche trova riscontro in un episodio, avvenuto quest'anno nel Giappone; dove la città di Hiro, vicina alla distrutta Hiroscima, ha chiesto ufficialmente scusa alle mosche, prima di procedere alla loro distruzione, resa necessaria dalle infezioni, che producevano. Alla presenza del sindaco SUZUKI e del prefetto di Hiroscima, un monaco buddhista aprì la cerimonia, recitando questa allocuzione, in poesia: « Care mosche, noi desideriamo di vivere amichevolmente con tutte le creature di questo mondo. Perciò proprio ci dispiace, che voi non facciate altro che danneggiare l'uomo, e siamo quindi costretti a sterminarvi. Care mosche, non ci portate quindi rancore, se vi ammazziamo; ma accettate con coraggio le inevitabili conseguenze del vostro aver voluto nascere in questo mondo come mosche ». Questo modo di sentire e di pensare bud-

dhistico è simile al francescano, ed anche al leonardesco: perchè anche LEONARDO, come san FRANCESCO, non amava le mosche; pur essendo congiunto col Santo nel comune amore per tutti gli animali. In quanto alle formiche, ci dice sant' EGIDIO, « che le formiche non piaceano a santo FRANCISCO, siccome gli altri animali: per la grande sollecitudine, che elle hanno di congregare e di riporre grano al tempo di state per lo verno; ma che gli uccelli gli piacevano molto più, perchè non congregavano nulla cosa nell'uno di per l'altro. E similmente gli piacevano le cicale, che, senza affannarsi per l'avvenire, intonano d'estate il loro inno immenso in gloria del sole ». Alla Porziuncula, ci racconta fra TOMASO da Celano, presso la cella di san FRANCESCO, v'era sopra un fico una cicala, che lo allietava con la soavità del suo canto. Un giorno il Santo, dicendole: sorella mia cicala, vieni a me; la fece scendere sulla sua mano e le disse: Canta, sorella mia cicala, e loda con giubilo il tuo creatore! E la cicala cantò, e lo riempì di letizia, finchè egli non la rimandò sul fico. E per otto giorni consecutivi egli la fece cantare così sulla sua mano; finchè, per tema di essere involto da quel canto nel diletto della carne, se ne staccò, e diede licenza alla sua sorella cicala. Ecco un quadro francescano, che può trovare riscontro, non solo in tutta l'Asia buddhistica, dall'antica India al moderno Giappone, ma anche nell'antica Grecia, adoratrice delle cicale, e nel modo di sentire e di pensare di LEONARDO da Vinci; il quale, come s'è visto, partendo da una cognizione scientifica, sperimentale ed irreligiosa, della vita e del mondo, si congiunge fraternamente col mistico e religiosissimo san FRANCESCO, nella comprensione e nel comune amore per gli animali.

Se ora passiamo dall'Italia alla Francia, invece della *concordia discors* di san FRANCESCO e di LEONARDO; i quali, discordi nei principii, sono concordi nel fine; troviamo un fenomeno perfettamente opposto, di pensatori, che, partendo da uno stesso principio, giungono a risultati contrari nella considerazione della vita e dell'intelligenza degli animali. In Francia infatti, per dare anche qui un esempio, se si prescinde da VOLTAIRE, e da altri illuministi e razionalisti del Settecento, che cominciavano ad imbevversarsi di sapienza orientale e non giuravano quindi più nell'assurda concezione di DESCARTES, degli animali considerati come macchine, troviamo nel Cinquecento e nel Seicento due grandi pensatori e scrittori, MONTAIGNE e PASCAL; i quali, nati, cresciuti, educati ed istruiti nella stessa fede occidentale cristiana, giunsero a risultati opposti, nel giudicare le facoltà morali ed intellettuali degli animali.

Il signor di MONTAIGNE se ne occupò di proposito nel capitolo dodicesimo del secondo libro dei suoi *Essais*, che va sotto il titolo di *Apologie de Raimond Sébond*. Egli, liberatosi dai dogmi col suo illuminato scetticismo, cercò in esso di dimostrare, servendosi delle proprie osservazioni e delle altrui testimonianze, specialmente raccolte dal poema *de rerum natura* di LUCREZIO, dalla *storia naturale* di PLINIO e dal trattato *sulla inge-*

*gnosità degli animali* di PLUTARCO, che gli animali sono, per qualità morali ed intellettuali, pari per qualità, se non per quantità, agli uomini; giungendo, così, alle conclusioni, già raggiunte dagli antichi pensatori greci, che dove c'è senso, c'è anche intelligenza: senza della quale i sensi non danno alcuna percezione. Così EPICARMO, che proclamava: la mente vede, la mente ode; tutto il resto è sordo e cieco: *Noús ὄρη καὶ νοὺς ἀκούει· τὰλλα κούφα καὶ τυφλά*. Così STRATONE, che diceva nulla potersi sentire senza l'intelligenza, e tutte le creature, che sentono, hanno anche intelligenza; ed EUMEO affermava, che tutti quelli, che vivono, hanno anche intelligenza; ed infine PORFIRIO, che, come ho già più innanzi riportato, conferisce l'intelligenza a tutti gli animali. In concordanza con essi MONTAIGNE scrive: « La presumption est nostre maladie naturelle et originelle. La plus calamiteuse et fragile de toutes les creatures, c'est l'homme, et quand et quand la plus orgueilleuse; elle se sent et se veoid logee ici parmy la bourbe et le fient du monde, attachee et clouee à la pire, plus morte et croupie partie de l'univers, au dernier estage du logis et le plus esloingné de la voutt celeste, avecques les animaulx de la pire condition des trois; et se va plantant, par imagination, au dessus du cerele de la lune, et ramenant le ciel sous ses pieds. C'est par la vanité de cette mesme imagination, qu'il s'eguale à Dieu, qu'il s'attribue les conditions divines, qu'il se trie soy mesme, et separe de la presse des aultres creatures, taille les parts aux animaulx ses confreres et compaignons, et leur distribue telle portion de facultez et de forces, que bon lui semble ». Così continuando, dopo aver accumulato le prove dell'intelligenza nei ragni, nelle api, nelle rondini ed in tanti altri animali, domestici e selvatici, del loro linguaggio, tra loro e con gli uomini, dei loro affetti e costumi sociali, della loro educazione ed istruzione, riesce a mettersi nello stesso piano morale ed intellettuale con la sua gatta: « Quand ie me ioue à ma chatte, qui scait, si elle passe son temps de moy, plus que ie ne fois d'elle? nous nous entretenons de singeries reciproques: si i' jay mon heur de commenter ou de refeuser, aussi elle a la sienne »; e continua « pour suyvre encores un peu plus long cette egalité et correspondence de nous aux bestes », ad accumulare prove su prove, esempi su esempi, testimonianze su testimonianze; per dimostrare l'intelligenza degli animali.

Gli *Essais* di MONTAIGNE furono assiduamente letti, profondamente meditati ed occasionalmente commentati da PASCAL: il quale a volta a volta li approvava o disapprovava, secondo che si accordassero o no col suo modo di pensare. Perchè PASCAL, grande quietista, grande scrittore, grande matematico, grande pensatore, e, soprattutto, grande spirito ascetico, tale, che al titolo *Doctus non Doctor*, scritto sulla sua pietra sepolcrale, si potrebbe aggiungere quello di *Professor paupertatis*, dato a san FRANCESCO, si trovava, rispetto allo scettico e mondano MONTAIGNE, press' a poco nello stesso rapporto, che abbiamo visto sussistere tra san FRANCESCO d'Assisi



e LEONARDO da Vinci. Egli, che credeva nel continuo progresso e nella perfettibilità dell'uomo, in confronto della fissità e stabilità degli animali, non poteva ammettere la identificazione dell'uomo con gli animali, patrocinata da MONTAIGNE e da altri pensatori, e scriveva nelle sue *Pensées* ; « N'est-ce pas là traiter indignement la raison de l'homme, et la mettre en parallèle avec l'instinct des animaux, puisqu'on en ôte la principale différence, qui consiste en ce que les effets du raisonnement augmentent sans cesse, au lieu que l'instinct demeure toujours dans un état égal ? Les ruches des abeilles étaient aussi bien mesurées il y a mille ans qu'aujourd'hui, et chacune d'elles forme cet hexagone aussi exactement la première fois que la dernière. Il en est de même de tout ce que les animaux produisent par ce mouvement occulte. La nature les instruit à mesure que la nécessité les presse. Il n'en est pas de même de l'homme, qui n'est produit que per l'infinité... De là vient que, par une prérogative particulière, non seulement chacun des hommes s'avance de jour en jour dans les sciences, mais que tous les hommes ensemble y font un continuel progrès ». Però, dopo aver tracciato, in contrasto con la fissità degli animali, le *magnifiche sorti e progressive* dell'umanità, PASCAL in un altro dei suoi *Pensieri* scrive : « Les inventions des hommes vont en avançant de siècle en siècle. La bonté et la malice du monde en général reste la même. » E questo non solo è in contraddizione con le sue premesse, ma s'accorda, invece, stranamente con la descrizione pessimistica che della *crudeltà dell'omo* fa LEONARDO da Vinci: « Vedrannosi animali sopra della terra, i quali sempre combatteranno infra loro con danni grandissimi e morte di ciascuna delle parti. Questi non avranno termine nella loro malignità... e il nutrimento dei loro desideri sarà di dar morte e affanno e fatiche e guerre e furie a qualunque cosa animata. E per la loro smisurata superbia questi si vorranno levare verso il cielo, ma la superchia gravezza delle lor membra gli porrà in basso. Nulla cosa resterà sopra la terra, e sotto la terra e l'acqua, che non sia perseguitata o guasta ; e quella dell'un paese remossa nell'altro ; e il corpo di questi si farà sepoltura e transito di tutti i già, da lor morti, corpi animati ». Questa terribile descrizione dell'animale uomo, fatta da LEONARDO (della quale noi possiamo constatare la verità nel nostro tempo velivoloveloce ed atomicodistruttore), si accorda con la realtà assai più di quella di PASCAL, dell'uomo non animale. La sola superiorità dell'uomo sugli altri animali, non è già quella del progresso della sua ragione e delle sue invenzioni, indicata da PASCAL, bensì l'altra, dimostrata da SCHOPENHAUER, di natura morale, consistente in quel che dice GOETHE, che cioè solamente l'uomo può l'impossibile, *nur allein der Mensch kann das Unmögliche* : che, cioè l'uomo è l'unico animale, che possa volontariamente rinnegare la vita. Rinnegarne la manifestazione transitoria, materiale, col suicidio, era, secondo gli antichi Romani, l'unica cosa, che rende l'uomo superiore non solo a tutti gli altri animali, ma anche agli dei; come



ci dice PLINIO, libro II, cap. 7: « Deus non sibi potest mortem consciscere, si velit: quod homini dedit optimum in tantis vitae poenis ». Rinnegarne l'eterna radice, facendo estinguere in vita la sete o volontà e, rinunciando così volontariamente ad essa, raggiungere la beatitudine della santità, è l'unica cosa, che può distinguere l'uomo dagli altri animali: come ci hanno insegnato il Buddha SAKYAMUNI e GESÙ e san FRANCESCO d'Assisi.

L'Inghilterra ci offre, per la comprensione dei rapporti tra l'uomo e gli animali, un quadro assai diverso da quelli, fin qui esaminati, dell'Italia e della Francia. Il popolo inglese, per innata disposizione originaria, per le esperienze e le conoscenze acquisite, durante due secoli di dominio nell'India, paradiso degli animali; e per l'istruzione ricevuta dai grandi suoi scienziati positivisti dell'Ottocento: DARWIN, con *The Origin of Species*, del 1859, *The Descent of Man*, del 1871, e *The Expression of the Emotions in Man and Animals* del 1872; HUXLEY, con le *Zoological Evidences of Man's Place in Nature*, del 1863; e LYELL con la *Geological Evidence of the Antiquity of Man*, pure del 1863: il popolo inglese, dico, così nato, educato ed istruito, è, tra i popoli dell'Occidente, quello che ha avuto e ha la maggiore comprensione e considerazione per gli animali; dei quali ha prodotto tante bellissime ed utilissime varietà di animali domestici, e per i quali ha istituito tante benefiche provvidenze per la protezione, tanto degli animali domestici, che dei selvatici. Non c'è da meravigliarsi, quindi, se nell'Inghilterra, ed in lingua inglese, si trovino, dopo l'India, le più numerose e più belle osservazioni sui caratteri morali ed intellettuali degli animali, ed i loro rapporti con quelli dell'uomo. Basta, a tal fine, ricordare il più grande rappresentante spirituale dell'Inghilterra, e *poëta poëtarum* di tutta la terra: Guglielmo SHAKESPEARE.

SHAKESPEARE, dal dì che nacque, nell'aprile del 1564, a Stratford-on-Avon, fin circa all'età di ventun anni visse sempre nella sua nativa Warwickshire, percorrendone i campi, i prati ed i boschi, in intima comunione con le piante e gli animali, come il giovane *Siegfried* nel *Waldweben* germanico, assorbendo tutte le esperienze e le conoscenze di quella vita naturale e primitiva; che dovevano fornirgli il materiale da elaborare nella sua opera portentosa, quando, costretto a lasciare il paese nativo, perchè incolpato di caccia di frodo nelle tenute di sir Thomas LUCY, riparò a Londra, per accendervi e far splendere il suo genio, come stella della più stupenda altezza: *William! Stern der schönsten Höhe*: come lo cantò GOETHE. Così si spiega e si comprende tutta la parte, che la vita animale, in tutte le sue forme, prende, insieme con la vita umana, nella sua immensa opera, lirica e drammatica. In essa, infatti, vediamo muoversi ed agitarsi, in comunione con gli uomini, l'innumerabile e piccolo mondo degli insetti, e quello degli anfibi, dei rettili, degli uccelli e dei mammiferi; con i loro specifici caratteri, come potrebbero essere osservati e descritti da un naturalista, ma sentiti con la sensibilità e compresi con la profonda intuizione di un

grande animo fraterno. Così sentiamo il canto mattutino dell'allodola, e quello vespertino del passero solitario, ed il notturno dell'usignuolo, ed il fischio del merlo ed il beffardo *cucu* del cuculo; e vediamo i voli delle rondini e dei corvi e dei falchi; e seguiamo l'ansia della lepre inseguita dai cani, ed assistiamo al chiuso dolore del cervo ferito a morte, ed alle carole dei puledri ed agli amori dei cavalli: il tutto sentito e rappresentato da un uomo, un genio, che è in intima comunione, di sentimento e di pensiero, con tutti gli animali. Una graziosa fiorita di tali descrizioni si trova nel volumetto di Anna ODIERNO DE LORENZO, *I Canti di Shakespeare*, Bari, Laterza, 1933; di cui si è avvalso anche Benedetto CROCE, nel suo libro *La Poesia*, Bari, Laterza, 1946. Ma essa si potrebbe ampliare in una ricca antologia, che mostrerebbe in quale maniera profonda e stupenda, SHAKESPEARE abbia compreso e rappresentato gli stati d'animo dei suoi minori fratelli del regno animale. Tale fratellanza si estende perfino ad alcuni insetti fastidiosi, come le mosche; che, come abbiamo visto, non erano neanche troppo bene accette al serafico san FRANCESCO. Così, per esempio, nella tragedia del *Tito Andronico*, vediamo, nella seconda scena dell'atto terzo, *Tito* rivolgersi contro il fratello *Marco*, che ha ucciso una mosca, con le parole: « Via di qua, assassino! tu uccidi il mio cuore! Un atto di morte, commesso sull'innocente, non s'addice al fratello di Tito. Va via: vedo, che non sei fatto per la mia compagnia. — Ma io, ahimè, ho ucciso solo una mosca. — Ma, se quella mosca aveva un padre ed una madre? Come essa farebbe pendere le sue alucce dorate e susurrare i suoi lamenti nell'aria! Povera mosca innocente, che era venuta a rallegrarci col suo susurro. e tu l'hai uccisa! » Naturalmente, qui *Tito* appone alla mosca i suoi sentimenti. Ma, questo è appunto il modo di sentire di SHAKESPEARE rispetto agli animali, di cui si ritiene congiunto, nella vita e nella morte; come quando, nella prima scena del terzo atto di *Measure for Measure*, dice, che il povero scarafaggio, che noi schiacciamo, prova nel dolore corporeo una pena così grande, come quando un gigante muore: *The poor beetle, that we tread upon, in corporal sufferance finds a pang as great, as when a giant dies.* » Anzi, l'umile e detestata mosca serve a SHAKESPEARE quasi come un simbolo del dolore del mondo: come quando, nella terza scena del quarto atto del *Pericle*, fa dire da *Dionisa* al marito *Cleone*, che egli è uno, il quale, per superstiziosa adorazione degli dei, i quali avrebbero fatto tutto per il meglio, giura, che è l'inverno, che uccide le mosche; senza pensare, che le arcane potenze divine, che creano le mosche, creano anche l'inverno, che le uccide: Natura, illaudabil maraviglia, che per uccider partorisce e nutre. E ribadisce, SHAKESPEARE, questo pensiero, certo non cristiano ortodosso, quando fa dire a *Gloucester*, nel *Re Lear*, che, come mosche per ragazzi scherzosi, così siamo noi per gli dei, che ci uccidono per loro divertimento: *as flies to wanton boys, are we to the gods; they kill us for their sport.* E lo stesso *Lear*, nella terribile scena della tempesta

nella notte, sulla landa deserta, riconosce, che l'uomo, senza i suoi vestiti, non è altro che un povero e nudo animale a due gambe: *unaccomodated man is no more but such a poor, naked, forked animal*. Contro tale universale dolore, che accomuna gli uomini agli animali, non c'è altro rimedio che la benevolenza per tutti gli esseri viventi; come nella prima scena del quarto atto del *Pericle* proclama *Marina* con parole, che sembrano tradotte da un antico canto buddhistico dell'India: « Io non dissi mai cattiva parola, nè feci male ad alcuna creatura vivente; credetemi, non ho mai ucciso un topo, nè colpito una mosca, nè calpestato, senza volerlo, un verme, che non ne piangessi »:

*I never spoke bad word, nor did ill turn  
To any living creature; believe me, ha,  
I never kill' d a mouse, nor hurt a fly;  
Nor trod upon a worm against my will,  
But I wept for it.*

Questi sentimenti e pensieri di SHAKESPEARE hanno il loro fondamento primo nel suo naturale modo di sentire e di pensare, arricchito dalle sue personali esperienze e conoscenze, e perfezionato anche dall'istruzione acquisita dai suoi autori favoriti.

Ed i suoi autori preferiti erano appunto MONTAIGNE, nella traduzione dei suoi *Essais*, fatta da FLORIO, da cui egli trasse pensieri e pagine intere, come faceva per PLUTARCO, e le *Metamorphoses* di OVIDIO, sia nella versione del GOLDING, del 1599, che nell'edizione aldina del testo latino, del 1502, da lui posseduta. Da OVIDIO egli trasse tutta la sua concezione della metempsicosi tra uomini ed animali, di cui egli fa frequente menzione, riportandola a PITAGORA, e per cui i suoi contemporanei ne fecero quasi un OVIDIO redivivo. Così Francis MERES, professore nell'Università di Cambridge, pubblicando nel 1598 il suo libro *Palladis Tamia*, scrisse: « Come l'anima di *Euforbo* fu creduta rivivere in *Pitagora*, così la dolce, ingegnosa anima di *Ovidio* rivive nel dolceissimo SHAKESPEARE, dalla lingua di miele. E come *Plauto* e *Seneca* sono ritenuti i migliori, per la commedia e la tragedia, tra i latini, così SHAKESPEARE è il più eccellente tra gli inglesi in entrambi i generi ». E di OVIDIO egli fece principalmente sua la dottrina della palinogenesi, insegnata da PITAGORA. Basta darne qualche esempio. In *As you like it*, nella seconda scena dell'atto terzo, egli fa dire a *Rosalinda*: « Io non fui mai così messa in rima dal tempo di *Pitagora*, quando ero un ratto irlandese, che appena me ne ricordo ». E nella prima scena del quarto atto del *Mercante di Venezia* fa dire da *Graziano* a *Shylock*: « Tu quasi mi fai vacillare nella mia fede cristiana, ed adottare l'opinione di *Pitagora*, che le anime degli animali si infondono nei corpi degli uomini ». Ma, dove la dottrina di PITAGORA più campeggia, è in *Twelfth Night*, quando, nella seconda scena del quarto atto, il *Clown* fa una lezione di essa al puritano *Malvolio*: *a kind of a puritan, the devil a puritan*



*that he is.* Ecco il dialogo. *Clown*: Qual'è l'opinione di Pitagora sugli uccelli? *Malvolio*: Che l'anima di nostra nonna può dimorare in un uccello. — *Clown*: Che pensi tu di questa opinione? — *Malvolio*: — Io penso nobilmente dell'anima e non approvo affatto tale opinione. — *Clown*: Addio, resta nella tenebra della tua ignoranza. Tu dovrai adottare l'opinione di Pitagora, prima che io ti ritenga sano di mente, e temere di uccidere una beccaccia, per paura di sloggiarne l'anima di tua nonna. Addio! -- Dalle quali battute umoristiche si vede anche chiaro, come SHAKESPEARE effettivamente inclinasse alle opinioni di PITAGORA e di OVIDIO sull'intima parentela tra gli uomini e gli animali.

Il genio di SHAKESPEARE ha espresso, in sintesi, tutto quello, che il popolo inglese poteva analiticamente esprimere sui sentimenti e l'intelligenza degli animali. E' inutile quindi ulteriormente insistere su tutto quello che su tale argomento hanno detto gli altri scrittori inglesi, scienziati, letterati, poeti e filosofi, che sono legione. Basti ricordare le espressioni di attaccamento, che molti di essi, come BYRON, hanno fatto incidere sulle tombe dei loro cani; nelle quali rivive lo stretto legame di comprensione e di affetto, che ha reso famoso, durante tre millenni, nell'*Odissea*, l'amore di *Ulisse* per il suo cane *Argo* e, nel *Mahâbhârata*, quello dell'eroe *Arjuna* per il cane *Dharma*. L'ultima espressione di tale affetto si trova nella simpatica biografia, scritta da Virginia WOOLF nel 1933, sul cane spaniel *Flush*, che accompagnò la scrittrice Elizabeth BARRETT BROWNING e suo marito Robert da Londra a Firenze e qui, in Casa Guidi, morì. Ma non si può tacere dell'ultimo grande scrittore inglese, KIPLING, che tanta parte della sua opera ha dedicato agli animali. Rudyard KIPLING, nato e cresciuto in India, figlio del disegnatore e conservatore del Museo di Lahore, John LOCKWOOD KIPLING, che aveva a sua volta scritto, nel 1891, un libro su *Man and Beast in India*, fu, per nascita, vita, educazione ed istruzione, portato ad osservare, conoscere ed amare tutto il mondo animale, non solo dell'India, ma di tutta la terra; ed a descriverlo, facendo rivivere l'antica favolistica e novellistica indiana in numerosi suoi libri: come *Just so Stories for little Children*, *Animal Stories*, *Collected Dog Stories* etc. e soprattutto i due *Jungle Books*, tradotti nelle lingue di tutti i paesi civili; di cui un racconto, *Toomai of the Elephants*, ridotto in film, girato nell'India, col titolo *Elephant Boy*, sotto la regia di KORDA e FLAHERTY e protagonisti il giovinetto indiano SABHU e l'intelligentissimo elefante KALA NAG, ha fatto il giro di tutti i cinema della terra, rendendo a tutti evidente l'amore e la comprensione degli Indiani e degli Inglesi per l'intelligenza degli animali.

La Germania, a differenza dell'Inghilterra, non presenta la stessa molteplicità ed unanimità nella valutazione delle qualità morali ed intellettuali degli animali. Tale differenza si può anche scorgere, per tacere d'altro, nei due massimi rappresentanti, contemporanei ed amici, dell'arte e del pensiero tedesco nella prima metà dell'Ottocento: GOETHE e SCHOPEN-



HAUER. Il sommo poeta tedesco non aveva molta simpatia per gli animali specialmente per i cani. Nella prima parte del *Faust*, il segretario *Wagner*, simbolo del pedante professore tedesco, non vede nel cane nero, in cui *Faust* già presentiva una presenza demoniaca, altro che un volgarissimo cane: « Lo vedi bene: è un cane e non davvero uno spettro! Ringhia, esita, si stende sul ventre, scodinzola. Tutte cose che fanno i cani. Bestia buffa, proprio come un barbone! Ti fermi, e lui t'aspetta; gli parli, e ti si rizza contro; perdi qualche cosa e te la riporta, e salta in acqua a coglierti il bastone. Al cane, quando è bene allevato, anche l'uomo saggio s'affeziona ». E lo stesso GOETHE, non più come *Faust*, aveva espresso il suo giudizio non favorevole sul cane, accomunandolo, però, con l'uomo nel 73° dei suoi *Epigrammi veneziani*: « Non mi fa meraviglia, che gli uomini amino tanto i cani: perchè un miserabile birbo è, come l'uomo, anche il cane. »

*Wundern kann es mich nicht, dass die Menschen die Hunde so lieben:  
Denn ein erbärmlicher Schuft ist, wie der Mensch, so der Hund.*

A questo epigramma rispose, circa cinquanta anni dopo, nel 1845, SCHOPENHAUER con questa *antistrofe*: « Non mi può far meraviglia, che alcuni calunniino i cani: perchè troppo spesso, purtroppo, il cane svergogna l'uomo: »

*Wundern darf es mich nicht, dass manche die Hunde verläumden:  
Denn es beschämte zu oft leider den Menschen der Hund.*

E SCHOPENHAUER, infatti, è, tra i grandi tedeschi, quello, che più e meglio di tutti ha compreso e dimostrato l'unicità della vita cosmica tra gli uomini e gli altri esseri viventi, e la funzione dell'intelligenza, simile a quella dell'uomo, non solo nei cani, ma in tutti gli animali. Nel terzo capitolo dei suoi *Parerga und Paralipomena*, concernente soprattutto l'intelletto, egli raccomanda, come sollievo alla vita solitaria, la compagnia dei cani, nelle cui *qualità morali ed intellettuali* si trova sempre gioia e soddisfazione. Nel suo lavoro sul fondamento della morale, *Die Grundlage der Moral*, del 1840, SCHOPENHAUER denunciava la morale occidentale cristiana, derivata dalla concezione biblica, che separa nettamente, in tale campo, il mondo degli uomini da quello degli animali, ed aggiungeva: « Nella filosofia essa si fonda, a dispetto di ogni evidenza, sull'assunzione di una totale differenza tra uomo e animale; la quale fu espressa, come si sa, nel modo più deciso e categorico, da CARTESIO, come una necessaria conseguenza delle sue erronee opinioni. E quando la filosofia cartesiana-leibnitziana-wolfiana costruì, su concetti astratti, la psicologia razionale ed un'*anima rationalis* immortale; allora immediatamente i diritti na-

turali del mondo animale si opposero a questo privilegio esclusivo e patente d'immortalità del genere umano, e la natura elevò, come in tutti i simili casi, la sua protesta. Quindi i filosofi, angosciati dalla loro coscienza intellettuale, dovettero appoggiare la psicologia razionale con la sperimentale, ed affaticarsi ad aprire, tra uomo ed animale, un enorme abisso, un immenso distacco, per rappresentarli, malgrado ogni evidenza, come fundamentalmente diversi. Tali sforzi furono già derisi da BOILEAU:

*Les animaux ont-ils les universités ?  
Voit-on fleurir chez eux les quatre facultés ?*

Per essi, infine, gli animali non dovevano sapersi distinguere dal mondo esterno, non avere coscienza di loro stessi, nè avere alcun Io. Contro tali insulsi sforzi basti solo accennare all'illimitato egoismo, inerente in ogni animale, anche il più infimo; il quale dimostra a sufficienza, quanto gli animali sono consci del loro Io, di fronte al mondo esterno, o non-Io. Se un tale cartesiano si trovasse tra gli artigli di una tigre, si accorgerebbe subito, quale decisa differenza essa pone tra il suo Io ed il non-Io. Alla cognizione della identità di quel che è essenziale nella manifestazione dell'uomo e dell'animale, nulla giova più dello studio della zoologia e dell'anatomia comparata ». Ferrato in tale studio, SCHOPENHAUER, nei due volumi del suo *Mondo come volontà e rappresentazione*, giunse alla conclusione, che vi è minore differenza tra l'intelletto di un animale superiore e di un uomo comune, che tra quello di uno scemo e di un genio; che l'intelligenza degli animali differisce solo quantitativamente, non qualitativamente, da quella degli uomini; e che tutti gli animali hanno intelligenza (*Verstand*), ossia conoscenza, mediante il cervello, di spazio, tempo e causalità, e quindi agiscono per *motivi*, e non solamente per *stimoli*, come le piante.

E con ciò chiudo questa chiacchierata, nella quale ho cercato di dimostrare, con prove e testimonianze, dirette ed indirette, l'innegabilità dell'intelligenza negli animali.

## NUOVA IPOTESI PER UNA INTERPRETAZIONE STRUTTURALE DELLA SICILIA

*Nota del dr. Antonio Lazzari, presentata dal socio G. D'Erasmus*

(Adunanza del dì 7 novembre 1953)

**Sunto.** — Dopo avere brevemente accennato alla teoria della alloctonia delle argille scagliose siciliane, formulata alcuni anni addietro dal BENEÒ, ed ai problemi che ne derivano, vengono riassunte le critiche che alla teoria stessa sono state mosse da vari studiosi, compreso l'A. della presente nota.

Sulla scorta dei fatti geologici sicuramente accertati, viene poi formulata una ipotesi di lavoro che tende a ricondurre le condizioni strutturali della Sicilia nel quadro dei normali fenomeni orogenetici che avvengono in un bacino geosinclinalico.

### I.

Come è noto, negli ultimi anni è stata formulata per la Sicilia una teoria, secondo la quale la situazione geologica generale dell'Isola risulterebbe in stretta dipendenza da un fenomeno di eccezionale importanza, sia per la vastità delle aree che ne sarebbero state interessate, quanto per la durata — intesa in senso geologico — del fenomeno stesso; nonché — infine — per i riflessi che ne sarebbero derivati nei confronti delle ricerche minerarie, e specialmente di quelle degli idrocarburi.

Si tratterebbe, secondo BENEÒ (2) (3) (4) (5), cui spetta la formulazione di tale teoria, di una sovrapposizione, per colate gravitative, di un complesso tettonico di varie età e con molteplici caratteri litologici — le così dette argille scagliose (A. S.) — le quali, investendo quell'isola con direzione approssimativa generale da Nord, ne avrebbero ricoperto i più vari termini stratigrafici fino all'Elveziano compreso. In tutta la Sicilia BENEÒ riconosce carattere di autoctonia solo ai Peloritani, all'Etna ed all'Altopiano Ibleo; quest'ultimo sarebbe rimasto immune da tale ricoprimento avendo rappresentato una sorta di bastione aggirato dalle argille scagliose. Nelle altre parti dell'isola, invece, il complesso Langhiano-Elveziano, che negli Iblei affiora, sarebbe rimasto ricoperto dalla formazione delle A. S., presunta alloctona. La maggior parte dei rilievi calcarei mesozoici siciliani non sarebbero altro, pertanto, che degli « esotici » inglobati dalle argille scagliose in movimento e da queste passivamente trasportati lontano dai luoghi in cui si formarono.

Secondo tale teoria, nel corso della loro traslazione gravitativa, le ar-

gille scagliose avrebbero anche rappresentato il substrato sul quale si andava sedimentando il complesso Tortonian-Messiniano, considerato parautoctono e conseguentemente smembrato, ridotto in brandelli, e di nessun interesse per la ricerca degli idrocarburi.

Tale teoria, certamente originale — almeno per la Sicilia — e suggestiva, ma formulata in base a considerazioni puramente teoriche, non ha incontrato il favore dei geologi, o quanto meno è stata accettata solo da pochissimi. Ciò, forse, perchè non è apparsa avvalorata da osservazioni geologiche di dettaglio, dalle quali sia potuta scaturire attraverso i fatti accertati, ed anche perchè risente — evidentemente — delle imprecisioni offerte dalla carta geologica ufficiale al 100.000, dalla quale deve essere stata in buona parte ispirata.

Poichè la teoria suddetta non riveste solo carattere di pura speculazione scientifica, ma tocca il campo pratico della ricerca mineraria, ed in particolare quello degli idrocarburi, è stato possibile, proprio in conseguenza di tali ricerche, rendersi conto delle sue manchevolezze; ed io, in occasione del VII Convegno Nazionale del Metano e del Petrolio (Taormina, aprile 1952) ebbi per la prima occasione di esporre alcune idee ad essa contrarie, tenendo presenti gli studi da me compiuti nella Sicilia Orientale per conto dell'E. S. V. A. I. S. O., e condotti appunto al fine della ricerca degli idrocarburi (10) (11).

Dopo la pubblicazione di tali mie note, anche altri geologi hanno ritenuto opportuno precisare le idee in merito alla tettonica della Sicilia, contrapponendo alla teoria delle traslazioni gravitative sia degli elementi acquisiti sul terreno, che delle considerazioni di carattere generale, tendenti tutti a dimostrare la infondatezza della teoria e la sua inapplicabilità alle condizioni geologiche realmente esistenti in Sicilia.

Così FABIANI (8), in un esauriente lavoro che prende le mosse da una interpretazione data da MEDI e da MORELLI (15) di alcune recenti misure gravimetriche effettuate nell'Isola a cura dell'Istituto Nazionale di Geofisica, confuta serratamente la teoria delle pretese grandi traslazioni gravitative delle A. S., dimostrando la sua illogicità e la mancanza di qualsiasi prova valevole per la sua accettazione.

Intanto, essendosi estesi ed intensificati i lavori di rilevamento geologico, soprattutto in relazione all'impulso, direttamente od indirettamente dato dal Governo Regionale Siciliano alle ricerche minerarie <sup>1)</sup>, nuovi importanti elementi sono man mano emersi; e questi non appaiono davvero tali da confortare la teoria di BENEÒ. Anzi si può dire che tutto contribuisce a dimostrare come, pur non potendosi escludere dei movi-

---

<sup>1)</sup> S' intende che notevoli contributi sono venuti dagli studi delle varie società di ricerca petrolifera. Per quanto i risultati di tali studi non siano resi noti, pure si sa che essi non risultano a favore della teoria di BENEÒ.



menti a carattere locale delle argille scagliose <sup>1)</sup>, queste sono da considerarsi autoctone, come del resto già le voleva BEHRMANN (1); analogamente alle argille tortoniane ed alla serie gessoso-solfifera, sicuramente autoctone.

Prove senza dubbio interessanti della autoctonia della serie tortoniana sono infatti portate da DE STEFANI (7) per il monte Maranfusa, presso Roccamena in provincia di Palermo. Difatti, i presunti esotici calcarei di età mesozoica risultano essere stati lambiti, certamente, da un mare tortoniano lì nel posto ove si trovano, non potendosi diversamente interpretare la presenza di solchi di battigia, di falesie e di grotte costiere, di origine marina, lungo i margini dei rilievi calcarei stessi; questi, infatti, dovettero essere circondati per ogni dove dal mare miocenico se ora su tali rilievi ritroviamo, in condizione di regolare trasgressività, i depositi relativi <sup>2)</sup>.

Anche recentemente, e sempre in relazione al problema geotettonico della Sicilia, FLORIDIA (9) ha ritenuto opportuno richiamare l'attenzione sopra un insieme di ben circostanziate considerazioni stratigrafiche e di giacitura, dalle quali risulta anzitutto evidente che, allo stato attuale delle nostre conoscenze, nulla autorizza « a fare delle varie argille siciliane, appartenenti ai più disparati termini stratigrafici, una unità tettonica alla quale estendere il nome ed il significato di argille scagliose, non solo, ma a farne per giunta una massa esotica ».

Inoltre, è da tenere presente che una teoria, dovendosi basare, in quanto tale, su fatti accertati, dovrebbe pure spiegare ciò che è dato osservare in Sicilia; mentre invece risulta in assoluto contrasto (secondo FLORIDIA) con molti fatti geologici incontestabili di quell'Isola. Ed è anche possibile rilevare che la presunta parautoctonia dei depositi tortoniani e messiniani, messa in particolare evidenza da BENEÒ nel suo tentativo di dimostrazione della identità tettonica fra Sicilia e Rif (4), e da lui ribadita nella discussione che seguì alla mia comunicazione sulla Piana di Catania (10) al VII Convegno del Metano e del Petrolio è stata recentemente ed indiscutibilmente dimostrata infondata, almeno per la zona da me studiata. Difatti, i risultati delle indagini geofisiche condotte con il metodo sismico a riflessione nella Piana di Catania mostrano come non si possa parlare di frammentarietà delle formazioni tortoniane, come vorrebbe BENEÒ, poichè tale serie stratigrafica risulta chiaramente in condizioni di

<sup>1)</sup> Occorre qui chiarire che sotto il termine generico di argille scagliose (A. S.), BENEÒ intende tanto le argille scagliose intese nel senso classico, quanto le formazioni del flysch paleogenico.

<sup>2)</sup> In altra nota in corso di stampa DE STEFANI riporta il caso di parecchie altre località ove è possibile osservare le stesse condizioni (Vedi in " *Contributi di Scienze Geologiche* „ del Centro di Studio per la Geologia dell'Italia centro-meridionale del C. N. R., vol. III; Roma. 1953).

normale giacitura e di continuità areale, fornendo ottime riflessioni fino alla profondità di 1500-2000 m. ed oltre (12).

Né sono soltanto questi gli elementi che parlano contro la teoria di cui trattasi; altri, e numerosi, ne sono emersi, particolarmente significativi, anche perchè in relazione alle ricerche geologiche condotte dai collaboratori di BENEÒ nell'ambito dei rilevamenti effettuati per conto dello Ente Nazionale Metano e dell'Ente Zolfi Italiani.

Così, difatti, nel corso delle escursioni scientifiche effettuate in occasione della 57<sup>a</sup> Riunione Estiva della Società Geologica Italiana (Sicilia, 4-10 ottobre 1953), i convenuti, che si attendevano di visitare zone per le quali risultasse dimostrata la teoria delle traslazioni gravitative delle argille scagliose, hanno invece potuto constatare come si sia parlato quasi sempre di normali condizioni di giacitura delle varie serie stratigrafiche; di continuità per vaste aree delle formazioni neogeniche; di esistenza di strutture positive integre in queste medesime formazioni, anche in base ai risultati delle indagini geofisiche condotte con vari metodi.

Si può dire, quindi, che è stato fornito un quadro quanto mai normale della tettonica di quasi tutte le zone visitate, ove si escludano quelle alla cui illustrazione era personalmente impegnato BENEÒ; ed è stato pure possibile constatare come vi sia una sostanziale differenza di vedute fra questo e la maggior parte dei suoi stessi collaboratori (16).

Noterò infine che il recente ritrovamento di argille paleozoiche (Carbonico) al di sotto del Trias del Monte Scalpello (LIPPARINI, comunicazione verbale) elimina anche ogni dubbio sulle interpretazioni di alcuni dati acquisiti con il metodo delle correnti telluriche per quella zona, e pone in genere le formazioni triassiche della Sicilia su di substrato più antico, in regolari condizioni di giacitura. Di conseguenza, alcuni presunti *esotici*, invero non piccoli, quali il Monte Judica, il Monte Scalpello ecc., cessano di essere tali e tornano a rappresentare spuntoni di formazioni più antiche delle argille scagliose e da queste normalmente emergenti. Ma di ciò avrò occasione di dire ancora successivamente.

## II.

Penso che molti studiosi, che in questi ultimi tempi hanno avuto occasione di occuparsi di questioni geologiche siciliane, si siano fatta un'idea personale di quali debbano essere state le modalità secondo cui si è estrinsecata la storia geologica post-mesozoica di quella regione. I risultati delle loro indagini personali, gli scambi di vedute con colleghi, il sereno esame degli elementi raccolti con la mente sgombra da preconcezioni, e con il desiderio di conseguire conoscenze quanto più possibile aderenti alla realtà delle cose osservabili (perchè tale è l'abito mentale di chi è aduso

ai problemi della ricerca degli idrocarburi), sono tutti elementi che hanno generalmente portato alla convinzione che la teoria delle grandi traslazioni delle A. S. non trovi riscontro nelle effettive condizioni geologiche della Isola di Sicilia.

Nel complesso, pur riconoscendo che talvolta si verificano condizioni tettoniche notevolmente complicate, che richiedono, per la loro esplicazione, l'ammissione di particolari fenomeni geologici, non escluso un certo movimento traslativo delle serie paleogeniche, ma sempre a carattere locale, gli studiosi che si occupano della Sicilia non saranno potuti giungere che ad una sola conclusione: quella, cioè, che la tettonica post-mesozoica di quell'Isola rientra in definitiva in un quadro perfettamente normale, senza il quale — come del resto ho già dimostrato (11) — la ricerca degli idrocarburi assumerebbe un aspetto ancor più aleatorio di quanto già lo sia normalmente, soprattutto per la pratica inapplicabilità della maggior parte dei metodi geofisici, il cui impiego è indispensabile per la individuazione delle strutture positive.

Del resto, anche l'atteggiamento assunto dalle varie società che detengono permessi per ricerca per idrocarburi in Sicilia sembra dimostrare che siamo ben lungi dal dovere ammettere le condizioni volute dalla teoria della traslazione delle argille scagliose da grandissima distanza.

Certo è che in Sicilia molti fatti geologici possono trarre in inganno se esaminati superficialmente o se considerati con mentalità da rilevatore, accurato ma « geometrico », e non con occhio da naturalista. Difatti, le vaste aree occupate dalle argille scagliose tipiche o dal flysch, l'apparente situazione dell'Altopiano Ibleo circondato dalle argille scagliose che lo avrebbero aggirato senza sovrapporsi, il complesso Torto-niano-Messiniano giacente talora direttamente sulle A. S. stesse (il che ha portato alla errata concezione della sua parautoctonia), sono tutte situazioni che possono essere variamente interpretate a seconda dello spirito con il quale si guardano; ma non è affatto necessario che, per spiegarle, si debba ricorrere a situazioni eccezionalmente complesse. Basterebbe invece, a mio avviso, inquadrare la situazione geologica della Sicilia nei suoi aspetti stratigrafici e tettonici risultanti alla attenta e serena osservazione, in quelle che sono le classiche concezioni della geologia generale, e che trovano riscontro in altre situazioni italiane, che con quella siciliana hanno molteplici analogie.

Evidentemente, per accedere ad una tale idea è necessario considerare le cose da un punto di vista squisitamente naturalistico: occorre, cioè, immaginare la natura in atto, e non ricorrere alla artificiosa concezione che si possa accomunare, sotto il termine generico di argille scagliose, un insieme di cose assai diverse, sia dal punto di vista litologico che da quello stratigrafico, e diverse — soprattutto — per il significato di facies pertinente



ai vari sedimenti. Nel caso specifico, a me sembra che, seguendo tale criterio non giustificato da nessuna valida ragione, nel termine stesso di argille scagliose si finirebbe con il comprendere qualsiasi tipo di formazione, per la sola condizione di essere affetta da una tettonica complessa.

Se, invece, procediamo ad una esatta valutazione delle parti costituenti le così dette A. S., in Sicilia come altrove, possiamo dividerle in quello che ancora oggi molti geologi chiamano il flysch (che pur non rispondendo a criteri cronologici, assume un ben preciso e definibile significato di facies, che nel nostro caso è di fondamentale importanza <sup>1)</sup>) e nelle argille scagliose vere e proprie. Queste ultime vanno intese nella accezione dei geologi del passato, ed hanno pure esse un ben preciso significato di facies; e potremo anche considerare il complesso quale unità tettonica, nel senso che le due formazioni, nel loro insieme, hanno partecipato ad una fase di piegamento e di dislocazione dei sedimenti depositatisi in un'area geosinclinale, nel cui ambito ciascuno dei due termini aveva una ben definita distribuzione.

Si tratta, in definitiva, di partire dal concetto che, in seno allo stesso bacino sedimentario geosinclinalico, mentre nelle zone marginali si andavano depositando i terreni in facies di flysch, nelle aree centrali e profonde si accumulavano i sedimenti che sarebbero poi diventati le argille scagliose vere e proprie. A seguito del successivo fenomeno orogenetico (che a me piace immaginare si sia svolto secondo la teoria di RITTMANN) le argille scagliose saranno state anche *spremute* dalla zona centrale, venutasi a trovare compressa fra le zone marginali, riversandosi verso di queste, sovrapponendosi talvolta al flysch dei margini in modo tale che questo possa esserne rimasto inglobato e costringendolo — comunque — a subire, di solito, sollecitazioni tali da consentire il realizzarsi di una tettonica assai varia.

Una tale concezione della meccanica dei movimenti ai quali abbiano partecipato flysch ed argille scagliose, si può ritenere fondata sulla realtà dei fatti osservati, se non in Sicilia (per la quale le mie conoscenze regionali non sono sufficientemente vaste ed approfondite) almeno per altre aree italiane, quali ad es. quella compresa fra l'Appennino meridionale e le Murge. Ivi, difatti, è innegabile la presenza delle argille scagliose classiche, come innegabile è la presenza del flysch calcareo-marnoso ed anche arenaceo, in condizioni di giacitura ben distinte. Le argille scagliose — nel loro movimento con risultante complessiva verso nord-est, — hanno esercitato sul flysch marginale, di per sè stesso più rigido, sollecitazioni varie,

---

<sup>1)</sup> Non si riesce davvero a comprendere per quali ragioni in Italia si tenda ad abbandonare questo termine, mentre molti geologi stranieri continuano a servirsene in lavori modernamente concepiti e di importanza fondamentale (17)



ma specialmente ad andamento tangenziale, ed in guisa tale da determinare una tipica tettonica a scaglie.

Inoltre, la presenza di esotici nelle argille scagliose, di veri esotici strappati ad un substrato calcareo mesozoico, od anche eocenico, rende il quadro ancor più confacente allo schema suddetto. E' ovvio che, per spiegare la situazione descritta per quella zona dell'Italia meridionale, non è necessario far superare — come si vorrebbe — la barriera costituita dall'Appennino da una massa di A. S. in traslazione gravitativa, provenienti dal mar Tirreno.

Le analogie geologiche esistenti fra Sicilia ed Italia meridionale sono troppo evidenti e note perchè non si sia portati a pensare anche ad una analogia di fenomeni post-mesozoici; ed appare quindi evidente come non sia azzardato ammettere che in realtà il meccanismo che in Sicilia ha portato i sedimenti del Paleogene ad assumere le attuali condizioni di giacitura, possa rientrare in uno schema orogenetico fondato sulla teoria di RITTMANN e sul fatto che flysch ed argille scagliose siano cose ben distinte, anche se le loro vicissitudini tettoniche ne abbiano fatto in alcuni casi (non sempre, si badi bene) una massa più o meno mescolata.

Naturalmente, occorre anche qui guardare le cose con occhio da naturalista; ciò significa, ad es., non considerare esotici quei lembi della serie gessoso-solfifera che poggiano direttamente sulle argille scagliose e sono rimasti isolati per semplici fenomeni di erosione. Tali lembi, in buona parte dei casi, sono perfettamente collegabili fra di loro e presentano talvolta livelli di tripoli a contatto delle A. S., magnificamente conservati pur nella loro fragile consistenza; il che non sarebbe possibile se quei lembi fossero stati trasportati passivamente per lunghe distanze.

Nè, d'altra parte, è sufficiente vedere un rilievo calcareo mesozoico — piccolo o grande che sia — circondato per ogni dove dal flysch, per accettare l'opinione che esso rilievo debba considerarsi « esotico », mentre appropriate conoscenze sul modo di formazione dei terreni di tale facies <sup>1)</sup> bastano a spiegare la situazione osservata.

Naturalmente, non è neppure il caso di fare osservazioni sulla voluta alloctonia dei Monti Sicani, o su altri casi del genere, tanto è palese la infondatezza dell'assunto.

---

<sup>1)</sup> Quanto al flysch ed al problema della sua formazione mi pare assai importante quanto ebbe a scriverne R. ZUBER, geologo polacco specialista nella ricerca del petrolio, che conosceva assai bene il flysch dei Carpazi. Egli aveva osservato la natura all'opera nella deposizione dei terreni di quella facies, nella zona antistante la foce dell'Orenoco, nel Venezuela. Le sue idee in proposito sono di tale chiarezza ed importanza che, ritenendo di fare cosa utile agli studiosi, sono oggetto di una mia nota in corso di stampa (13).

III.

Queste ed altre considerazioni ho avuto occasione di *ripetermi* nel corso delle escursioni scientifiche della 57<sup>a</sup> Riunione estiva della S. G. I. e mi è sembrato quasi logico e naturale, dopo avere brevemente illustrato la Piana di Catania, ed avere accennato ai lavori ivi eseguiti, con buon successo, per la ricerca degli idrocarburi, esporre la *ipotesi* a cui ho precedentemente accennato. Secondo questa, quindi, si potrebbe considerare la situazione geo-tettonica post-mesozoica della Sicilia nel quadro dei normali fenomeni di cui sarà stata sede l'area geosinclinale che doveva esistere nella zona. Tale grande bacino sedimentario doveva presentarsi allungato da Est verso Ovest ed essere compreso fra un presumibile massiccio cristallino e mesozoico rappresentato dai Peloritani e dalla loro continuazione verso occidente, e da un rilievo mesozoico che doveva estendersi nella Sicilia meridionale, a partire dall'altopiano Ibleo, fino a giungere ai monti del Trapanese.

Si tratta, è bene precisarlo fin da ora, di una semplice *ipotesi* di lavoro e non di una teoria; questa, difatti, necessiterebbe di una massa di elementi sicuramente accertati che a me invece mancano, e la cui disponibilità non può che essere il frutto dello sforzo, lungo e concorde, di molti studiosi.

Sarà ora necessario esaminare la Sicilia, quale ci appare nella situazione attuale, per stabilire se vi si riconoscano i presupposti fondamentali perchè possa essere considerata un vasto bacino di intensa sedimentazione nel quale, nel corso del Paleogene, si siano depositati quei terreni in facies di flysch e di argille scagliose che, a seguito delle sollecitazioni tettoniche subite, hanno poi assunto l'assetto attuale.

L'esame della carta geologica della Sicilia conduce ad una sintesi, riportata nella cartina schematica allegata, che scaturisce dalla seguente distribuzione dei terreni pre-paleogenici (indicati a tratteggio):

A) — *Margine settentrionale.*

a) Monti Peloritani, con il mesozoico ad essi addossato verso Sud e con il paleozoico e mesozoico affiorante verso occidente, fino a S. Agata di Militello ed oltre;

b) Rilievi mesozoici, affioranti senza continuità, dal meridiano di Cefalù fino al Palermitano ed a Trapani.

N. B. — La lacuna che sembrerebbe esistere nel margine settentrionale, fra S. Agata di Militello e Cefalù, deve ritenersi soltanto apparente.

È evidente, se bene si tenga conto delle indicazioni della gravimetria, che in quella zona le formazioni pre-terziarie debbono essere presenti a profondità non rilevante.



È ovvio che a Nord del margine descritto doveva corrispondere una zona continentale fornitrice del materiale sedimentario.

B) — *Margine meridionale.*

a) Rilievi mesozoici situati a Nord ed a Nord-Est di Sciacca.

b) Mesozoico che sappiamo certamente esistere, per recenti studi e perforazioni, nell'area dell'altopiano Ibleo, al di sotto delle formazioni mesomioceniche di facies calcarea e calcareo-marnosa, e di cui abbiamo testimoni nella zona del Capo Pássero e presso Siracusa.

N. B. — Lungo questo margine meridionale la continuità delle formazioni pre-terziarie, in affioramento, è meno evidente, notandosi una vasta lacuna fra i rilievi mesozoici di Sciacca-Bivona ed il Ragusano. Ciò, peraltro, non infirma la fondatezza della ipotesi, come sarà detto successivamente. Questo margine meridionale doveva corrispondere all'avampaese della geosinclinale.

Converrà intanto esaminare brevemente, lasciando poi agli studiosi il compito della raccolta di tutte le prove che possano convalidare la *ipotesi*.

da me formulata, se si conoscano attualmente elementi tali da fornire alla ipotesi stessa, un minimo di fondatezza.

Naturalmente, in questa breve disamina io mi baso esclusivamente su fatti a me noti, direttamente o indirettamente. A questo proposito può essere ricordato quanto segue:

1. — A Sud dei Peloritani, sul mesozoico di Taormina giace una serie flyschioide paleogenica che s' inizia con un ben riconoscibile conglomerato di trasgressione, cui segue la serie marnoso arenacea in normali condizioni di giacitura. Anche BNEO ammette che questa zona sia autoctona, e non si vede, quindi, perchè, spostandosi di alcune decine di chilometri verso occidente, quegli stessi terreni debbano diventare alloctoni.

Del resto, anche ad W dell' Etna, nelle zone di Troina, Gioitto, Cesarò ecc. e nel Monte Judica, Monte Scalpello ecc., MARCHESINI ed altri autori hanno riconosciuto analoghe condizioni di giacitura del flysch paleogenico.

2. — Le aree di affioramenti mesozoici della Sicilia occidentale stanno ad indicare, evidentemente, che il mare del terziario inferiore doveva penetrare in quelle zone come in un arcipelago. Vi erano, quindi, condizioni paleogeografiche particolarmente adatte per la sedimentazione dei terreni in facies di flysch (13), (17), e non è pertanto da meravigliarsi se quei rilievi risultano circondati dalle così dette A. S., o meglio dal flysch.

Si tratterà di vedere (o forse sarà stato già osservato nel corso di rilevamenti recenti) se vi siano o meno i segni della trasgressione del Paleogene sul Mesozoico; ma anche se tali indicazioni mancassero, ciò non infirmerebbe l'asserto, in quanto le zolle mesozoiche ribassate e ricoperte dal mare paleogenico, hanno continuato a spostarsi in basso per l'appesantimento determinato dall'accumularsi dei sedimenti. Può essere quindi sottratta alla nostra osservazione la zona di contatto trasgressivo, o questa può essere stata erosa.

3. — Il recente riconoscimento della esistenza, nella zona di Termini Imerese ed in quella del Monte Scalpello, ad opera di LIPPARINI (comunicazione verbale e (16), di terreni di età paleozoica (Carbonico) apporta un nuovo importante elemento alla comprensione di taluni fatti accertati per via geofisica <sup>1)</sup>, secondo i quali in alcune zone (ad es. in quella compresa fra Monte Judica, Monte Scalpello, Monte Tureisi ecc.) i valori delle aree d' ellisse risultavano tali da fare senz' altro ammettere a BNEO che i suddetti rilievi calcarei dovessero essere inglobati nelle argille scagliose e

---

<sup>1)</sup> Metodo delle correnti telluriche praticato dalla *Compagnie Générale de Géophysique* di Parigi.



rappresentare delle scaglie tettoniche passivamente trasportate dalle A. S. stesse.

A questo proposito ebbi già occasione di osservare (VII Conv. del Metano e Petr.) che noi nulla sapevamo del substrato sul quale poggiava il Monte Judica e gli altri rilievi della zona, e che comunque poteva benissimo trattarsi di un flysch triassico già noto in Sicilia. Ma, anche se si voglia affrontare il problema per altra via, è ben difficile ammettere, *statisticamente*, che tali scaglie tettoniche, che avrebbero viaggiato per alcune decine, forse per centinaia di chilometri, avessero conservato nel lungo viaggio (lungo nel tempo e nello spazio) una direzione conforme ad una delle direttrici tettoniche fondamentali della Sicilia (E-W); non solo, ma contrariamente ai principi della meccanica, tali scaglie avrebbero viaggiato conservandosi in « piedi », forse nella posizione originaria, sì da simulare ora delle strutture positive. E' da presumersi, difatti, che delle « lame » di materiale rigido, in un movimento del genere, si dispongano nella posizione più adatta per offrire la minore resistenza possibile nel movimento stesso.

Con l'accertata esistenza di terreni di età paleozoica, in facies argillosa, alla base del Monte Scalpello, anche i risultati delle ricerche telluriche in quella zona trovano la loro naturale spiegazione senza dovere ricorrere alla teoria delle A. S. alloctone.

4. — Per quanto si riferisce alla Sicilia occidentale, ove tutti i rilievi calcarei sarebbero stati esotici nelle argille scagliose, sappiamo che, secondo quanto hanno esposto i vari rilevatori nelle recenti escursioni, ed in particolare il COGGI (16), là dove affiorano le formazioni post-mesozoiche, il substrato calcareo resistente al passaggio delle correnti telluriche si trova a profondità normale, perfettamente compatibile con i consueti sviluppi delle serie stratigrafiche quali si conoscono in Sicilia. Il che val quanto dire che le zolle calcaree mesozoiche affioranti, pur nella loro apparentemente irregolare distribuzione rappresentano un tutto inseindibile, e trovano condizioni di continuità nel sottosuolo. Si tratta, quindi, di una situazione perfettamente rispondente a quanto si verifica altrove in Italia: strutture mesozoiche fagliate secondo le due direttrici fondamentali e pertanto suddivise in blocchi, variamente spostati nel senso verticale, fra i quali penetrava il mare terziario.

5. — Ho accennato, in precedenza, alla apparente lacuna esistente al margine meridionale della presumibile geosinclinale, fra gli Iblei e la zona di Sciacca-Bivona.

Noi nulla sappiamo della profondità del substrato pre-terziario, ma l'Ente Nazionale Metano, che ha condotto per conto del Governo Regionale Siciliano indagini con il metodo tellurico, è certamente in possesso

di elementi positivi in tal senso. Comunque è da notare che questa zona deve avere indubbiamente subito un notevole ribassamento, assai maggiore di quanto normalmente si nota nel resto dell' Isola.

In particolare ritengo che si possa affermare che il mare tortoniano, e poi messiniano, doveva penetrare sulla Sicilia proprio da questo lato, estendendosi nelle zone centrali e fin nella parte occidentale della Piana di Catania.

In una parola, ammessa con DE STEFANI, e del resto con lo stesso BENEÓ, la trasgressività generale del Tortoniano, possiamo ritenere, su dati di fatto, che il mare in quell'epoca penetrasse da Sud, dilagando poi per ogni dove, frammezzo ai rilievi di ogni età precedente, non esclusi quelli costituiti dalle A. S., o dal flysch, che intanto erano stati piegati.

Va poi tenuto presente che, per quanto Tortoniano e Messiniano rappresentino in Sicilia un cielo sedimentario completo, ed il secondo di tali termini corrisponda alla regressione, *localmente* il Messiniano stesso può risultare trasgressivo su qualsiasi terreno, e quindi anche sulle A. S., come avviene ad es. presso il margine appenninico della Valle Padana ed altrove.

Che il mare tortoniano penetrasse dal Sud, mi pare doversi ammettere anche in base alle conoscenze recentemente acquisite presso il margine meridionale della Piana di Catania, in merito al quale è in corso di stampa una mia nota (14). Ivi, difatti, come pure verso Nord (secondo le indicazioni della geofisica) sulla serie mesomiocenica ragusana giace direttamente il Pliocene, evidente segno, questo, di un periodo di continentalità durante il Tortoniano Messiniano.

Una tale ammissione io ritengo che, oltre tutto, spieghi magnificamente il perchè in Sicilia, e praticamente solo in Sicilia, si siano determinate quelle condizioni necessarie per la formazione di serie evaporitiche di notevolissimo sviluppo areale e verticale.

6. — Si è molto parlato dei così detti microdiapiri siciliani. Si tratta, in genere, di blocchi delle più varie dimensioni, estranei alla formazione sulla quale poggiano e di questa più antichi. BEHRMANN (1) ha richiamato l'attenzione sui microdiapiri della fascia meridionale, fra il meridiano di Agrigento e quello di Gela. E' la zona per la quale ho lamentato (vedi sopra) la mancanza di elementi per avere la continuità del margine meridionale della geosinclinale.

Possono tali diapiri essere ritenuti effettivamente i rappresentanti del substrato, dal quale sarebbero stati divelti ed allontanati per effetto delle tensioni interne esistenti nella massa delle A. S., e che tendono a far rag- giungere a queste una condizione di equilibrio? O sono invece degli esotici come ha tentato di dimostrare BENEÓ?

Personalmente ritengo che debba ammettersi l'opinione di BEHRMANN e di altri autori.

La mia esperienza sul flysch dell'Albania mi dice che blocchi inconfutabilmente diapirici apparivano (ad es. a nord del Campo petrolifero del Devoli) sul flysch interessato dalle faglie marginali del bacino. Gli elementi raccolti con numerose perforazioni interessanti il flysch ed il substrato calcareo eocenico, rispondevano perfettamente a tale concetto; e l'amico e collega dr. AZZALI, ora dell'E. Z. I., può farne testimonianza, essendo stata quella zona particolare oggetto dei suoi studi.

Per dirimere tale questione potrebbe essere di aiuto l'attento esame del come i microdiapiri sono disposti, vale a dire se, nel loro insieme, risultano allineati secondo note direttrici tettoniche, o secondo l'andamento di faglie sicuramente accertate nelle varie zone. Anche qui potrebbero essere di grande aiuto i risultati delle indagini telluriche.

7. — Spesso si è sentito parlare di esotici calcarei inglobati nelle A. S. paleogeniche (o nel flysch), riferendosi a rilievi di cospicue dimensioni o a piccoli e grandi blocchi sparsi nella massa di quelle formazioni.

L'esperienza insegna, ed una visione naturalistica dei fenomeni che possono verificarsi in un bacino sedimentario convalida, che dalle ripe di un mare paleogenico nel cui seno si andavano sedimentando flysch ed argille scagliose, potevano benissimo staccarsi (come si staccano dalle aspre rive di un mare attuale) blocchi grandi e piccoli di calcari, precipitando al piede delle falesie. La instabilità dei sedimenti ancora sciolti può dar luogo a smottamenti; e tali blocchi possono, scivolando sul fondo, portarsi fino a profondità considerevoli, rimanendo quindi inglobati dai sedimenti in via di deposizione.

A tale proposito, e proprio per il flysch, si veda TERCIER (17) che tali fenomeni descrive e quanto ne pensava R. ZUBER (13).

Personalmente ho potuto osservare in Calabria, nella valle dello Stilaro, un enorme blocco di granito della Serra S. Bruno, che non può essere pervenuto nei sedimenti miocenici, a parecchi chilometri di distanza dal posto di origine, se non con un processo del genere. E' da presumersi che in una zona di arcipelago, come ad es. il Trapanese, un siffatto fenomeno potesse verificarsi ripetutamente e per ogni dove, fornendo così grossi blocchi calcarei al bacino sedimentario.

Ciò non toglie, naturalmente, che possano risultare presenti veri esotici, strappati ad un substrato più o meno lontano, sul quale flysch ed argille scagliose si siano mossi nell'ambito dell'area geosinclinalica. Varrebbe pertanto la pena di studiare il materiale ritenuto esotico per accertare se per il tipo litologico, per le faune, ecc. non possa essere ricondotto alle formazioni esistenti in zone più o meno vicine.

Tracciato così un quadro schematico di quelle che dovevano essere le condizioni paleogeografiche della Sicilia nel Paleogene, e citati alcuni fatti sicuri che mi pare parlino in favore di una piccola geosinclinale siciliana sede della deposizione del complesso flysch-argille scagliose, ritengo che, non vi sia che ripetere l'invito che rivolsi ai geologi che si occupano della Sicilia, durante l'ultima escursione della 57<sup>a</sup> Riunione estiva S. G. I., dopo avere illustrato la Piana di Catania.

Dissi, allora, che la mia non era altro che una semplice ipotesi di lavoro, non una teoria; e che per farla eventualmente diventare tale è necessario che tutti gli studiosi della geologia siciliana apportino il contributo della loro personale esperienza e del loro lavoro di campagna alla esatta impostazione del problema geo-tettonico terziario dell'Isola; problema la cui risoluzione non può essere il risultato del lavoro di singoli, ma può solo scaturire dallo sforzo concorde di tutti coloro che, al di sopra delle personali soddisfazioni, hanno come interesse più alto la conoscenza della verità scientifica.

*Napoli, Istituto di Geologia dell'Università, 27 ottobre 1953.*

#### BIBLIOGRAFIA

1. BEHRMANN R. B., *Appunti sulla geologia della Sicilia centro-meridionale* Roma, Tip. Guggiani, 1938 (in deposito presso il Servizio Geologico d'Italia; non in vendita).
2. BENEQ E., *Sul microdiapiro di Leonforte e su quelli a nord di Gela (Sicilia centro-meridionale)*. Rend. Acc. Lincei, Vol. VII, 1949. Roma, 1949.
3. — — —, *Le possibilità petrolifere della Sicilia nel quadro di una più realistica interpretazione della tettonica italiana*. Boll. Serv. geol. d'Italia, Vol. LXXII. Roma 1950.
4. — — —, *L'identità tettonica fra la Sicilia e il Rif (Marocco francese)*. Boll. Serv. Geol. d'Italia, vol. LXXII. Roma 1950.
5. — — —, *Appunti sulla elaborazione di una diagnosi strutturale della Sicilia*. Boll. Serv. Geol. d'Italia, vol. LXXIII, n. 2. Roma, 1951.
6. — — —, *Tentativo di sintesi tettonica dell'Italia peninsulare ed insulare*. Boll. Soc. Geol. d'Italia, vol. LXVIII, 1949. Roma, 1950.
7. DE STEFANI T., *Tortoniano trasgressivo e mesozoico riesumato nei dintorni di Roccamena (Sicilia)*. Plinia, vol. IV. Palermo, 1953.
8. FABIANI R., *Sulle interpretazioni geologiche delle anomalie negative della gravità regionale in Sicilia*. La Ricerca Scientifica, anno 23<sup>o</sup>, n. 5, maggio 1953. C. N. R., Roma.
9. FLORIDIA G. B., *Alcune osservazioni intorno al problema geotettonico della Sicilia*. Riv. Min. Sic., vol. IV, n. 20, Marzo-aprile 1953. Palermo.



10. LAZZARI A., *Prospettive della Piana di Catania per la ricerca degli idrocarburi e primi risultati conseguiti dall' E. S. V. A. I. S. O.* Atti VII Conv. Metano e Petrolio, Taormina 21-24 aprile 1952. Palermo, I. R. E. S., 1952.
11. — — , *Alcune considerazioni in merito al problema della ricerca degli idrocarburi in Sicilia.* Mem. e note dell' Ist. Geol. Appl. Univer. Napoli, vol. IV, 1951. Napoli, 1952.
12. — — , *Primi risultati dell' indagine geofisica con il metodo sismico a riflessione nella Piana di Catania.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Matem., Ser. 4<sup>a</sup>, vol. XX. Napoli, 1953.
13. — — , *Il problema della sedimentazione dei terreni in facies di flysch secondo le antiche osservazioni di R. Zuber.* Boll. Soc. Nat. in Napoli, vol. LXII. Napoli, 1953.
14. — — , *Stratigrafia di un pozzo di ricerca acquifera situato in località Carmito, presso il margine sud-orientale della Piana di Catania.* Boll. Soc. Nat. in Napoli, vol. LXII. Napoli, 1953.
15. MEDI E. e MORELLI C., *Rilievo gravimetrico della Sicilia.* Annali Geofisica, vol. V, n. 2. Roma, 1952.
16. S. G. I. (Autori vari), *Guida alle escursioni della 57<sup>a</sup> Riunione Estiva (4-10 ottobre 1953).* IRES, Palermo, 1953.
17. TERCIER J., *Le flysch dans la sédimentation alpine.* Eclogae Geol. Helvetiae, vol XL n. 2. Bâle, 1947.

## INDAGINI SUL COMPORTAMENTO TERMICO DELLE ROCCE CALCAREE

*Nota del dott. Riccardo Sersale, presentata dal socio G. Malquori*

(Adunanza del dì 5 dicembre 1953)

**Sunto.** — A mezzo del dilatometro differenziale CHEVENARD, l' A. ha ricavato la registrazione fotografica delle curve termo-dilatometriche per numerosi tipi di roccia calcarea di differente tessitura: dai marmi, ai calcari criptocristallini compatti, ai calcari teneri e porosi.

Ha riscontrato una notevole dilatabilità anche a temperature relativamente basse, dilatabilità che è in stretto rapporto con la tessitura e particolarmente: con la grandezza degli elementi cristallini, con l' inomogeneità, il tormento della tessitura medesima, la porosità del materiale.

Attribuisce i fenomeni osservati alla diminuzione delle tensioni interne, per azione del calore, ed ai fenomeni di assestamento con esse collegati.

Ha rilevato inoltre un rapido e notevolissimo incremento della dilatabilità in vicinanza della temperatura di decarbonatazione.

Le indagini delle quali do conto nel corso della nota presente hanno preso lo spunto da una ricerca, che si viene svolgendo presso questo Istituto, intorno all' alterazione dei calcestruzzi per effetto del calore, ricerca nella quale si è dovuto tener conto del comportamento termico sia del cemento idratato e indurito, sia degli inerti, e fra questi, in modo particolare, del pietrisco calcareo che nella confezione del calcestruzzo trova da noi larghissimo impiego.

Ho per questo preso in esame differenti tipi di rocce calcaree, estendendo tuttavia le indagini dal caso specifico dei calcari cristallini, compatti, a grana fine, ai marmi e ai calcari teneri, porosi.

Per rilevare le variazioni dimensionali ho ricavato per ciascun campione la curva termo-dilatometrica servendomi del dilatometro differenziale CHEVENARD, a registrazione fotografica.

Sulle variazioni dimensionali che hanno luogo per effetto del riscaldamento dei differenti tipi di roccia calcarea, non si trovano a tutt' oggi nella letteratura delle notizie omogenee. Si conosce solo che la calcite non subisce modifiche strutturali per trattamento termico fino alla temperatura di decarbonatazione; l' altra forma del carbonato di calcio, l' aragonite, instabile, si trasforma a sua volta in calcite a temperatura relativamente bassa.

Per i minerali su ricordati la dilatabilità varia nelle differenti dire-

zioni degli assi cristallografici, si che al riscaldamento — come è noto, ad esempio, per i cristalli di calcite — hanno luogo fessurazioni e frantumazioni.

Nella fig. 1 è riportata la documentazione fotografica originale relativa a vari campioni di marmo.

Come si vede, i marmi accusano una forte dilatazione, che iniziata a bassa temperatura prosegue poi uniformemente fin verso i  $730^{\circ}$ , dopodichè si osserva rallentamento, poi netta inflessione della curva termo-dilatometrica, ed infine, a  $820^{\circ} \div 830^{\circ}$ , la brusca contrazione che accompagna la decarbonatazione.

La dilatazione massima che si riscontra per il marmo saccaroide di Carrara preso in esame, è del  $0,87\%$ , come risulta dal diagramma riportato in fig. 2 al n° 1.

In fig. 3, sono invece riportate le variazioni del coefficiente di dilatazione in funzione della temperatura, sempre per il medesimo marmo di Carrara.

La dilatazione al riscaldamento, che praticamente è irreversibile, è dovuta all'alentamento delle tensioni interne ed a movimenti di assestamento dei cristalliti; la

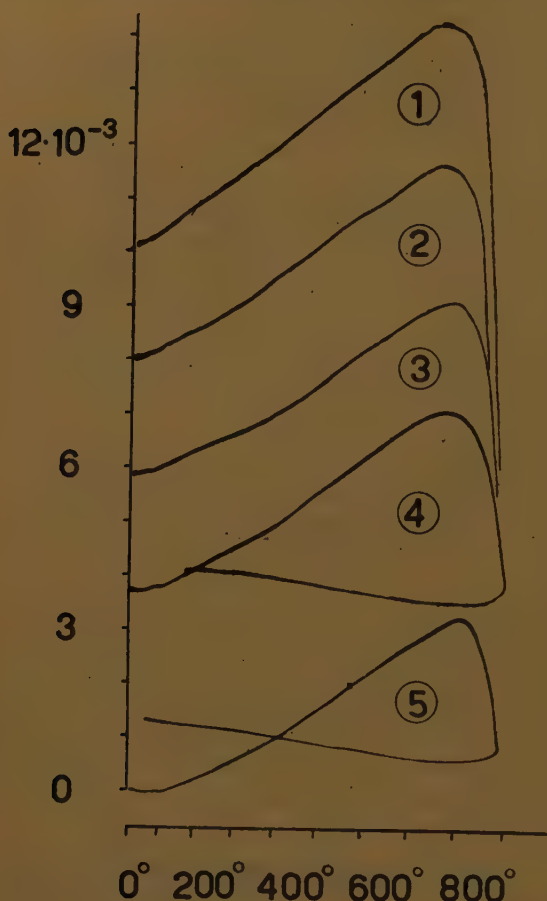


Fig. 1. — Curve termo-dilatometriche differenziali (Chevenard); (provino di cm. 2).

- N° 1 Marmo statuario.
- » 2 Marmo saccaroide.
- » 3 Marmo bianco uniforme.
- » 4 Marmo grigio (bardiglio)
- » 5 Marmo venato.

caduta poi della curva in corrispondenza della decarbonatazione è facilitata dalla compressione esercitata dalla molla del dilatometro CHEVENARD.

La frattura dei singoli elementi cristallini e l'apertura delle giunzioni fra elemento ed elemento sono osservabili sulla tav. I, dove sono riprodotte le sezioni lucide di taluni campioni di marmi e di calcari che hanno subito trattamento termico.

Nella fig. 4 son riportate le curve dilatometriche relative al marmo

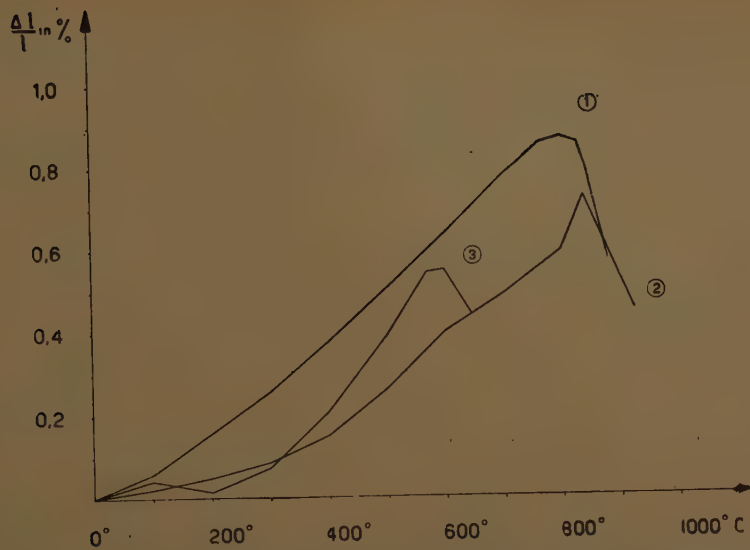


Fig. 2. — Valori delle dilatazioni unitarie, espresse in per cento, in funzione della temperatura.

- N° 1 Marmo saccaroide di Carrara.
- 2 Calcare criptocristallino compatto
- 3 Provino preparato con polvere passante al vaglio di 4900 maglie per  $\text{cm}^2$ , del medesimo calcare di cui al n. 2.

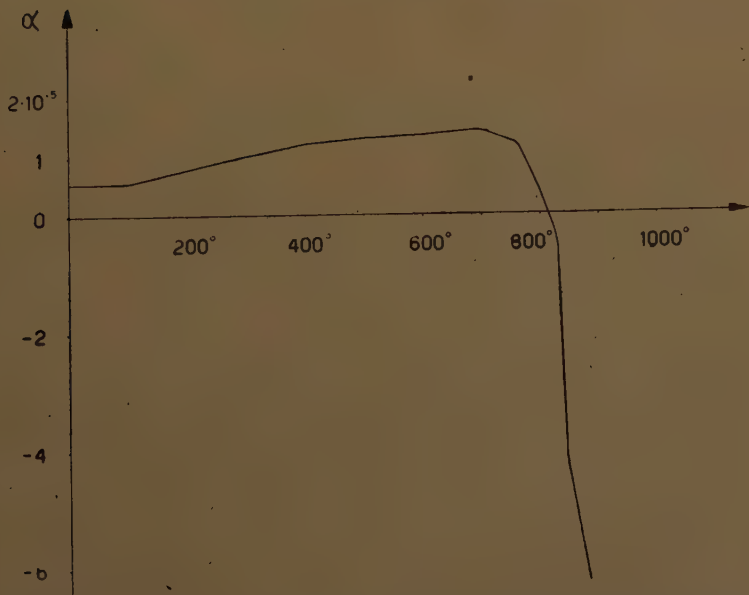


Fig. 3. — Variazioni del coefficiente di dilatazione  $\left( \alpha = \frac{1}{l} \frac{\Delta l}{\Delta t} \right)$  in funzione della temperatura.

Marmo saccaroide di Carrara.



greco duro (*Marmor parium*) (microfoto n° 2 della tav. II) e ad un marmo lamellare alpino (Candoglia) ad elementi cristallini molto grossi (cfr. microfoto n° 1 della tav. II).

La dilatazione è meno accentuata che non nei casi di cui alla fig. 1.

Diverso è altresì il comportamento dei calcari sia cristallini a grana

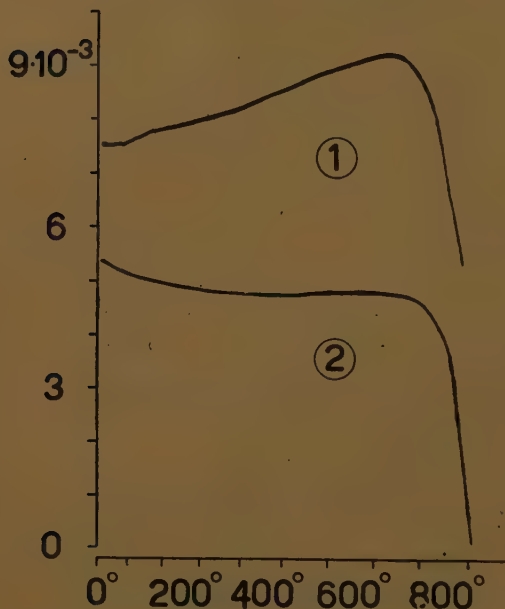


Fig. 4. — Curve termo-dilatometriche differenziali (Chevenard); (provino di cm. 2).

N. 1 Marmo greco, duro (*Marmor parium*).

• 2 Marmo lamellare, alpino (Candoglia).

criptocristallino compatto preso in esame è del 0,73% (v. fig.: 2, n° 2).

Nella fig. 6 sono riprodotti tre esempi di trattamento termico eseguito sul medesimo calcare compatto, criptocristallino, proveniente dal territorio di Mondragone (Caserta).

La curva n° 1 si riferisce all'esame del materiale fino alla temperatura di decarbonatazione; la n° 2 al riscaldamento fino al completamento della prima dilatazione; la n° 3 è stata rilevata su materiale previamente trattato per alcune ore a 500° onde eliminare l'effetto di dilatazione a bassa temperatura.

Le curve termo-dilatometriche rilevate per tutti i materiali saggiati, su provini delle medesime dimensioni e con la stessa velocità di riscaldamento del forno, che è completamente aperto (tubolare), accusano delle sensibili diversità nelle temperature di decarbonatazione.

Ora, è noto che la temperatura di decarbonatazione rapida è, se in corren-

minuta, compatti, sia teneri e porosi, calcari le cui curve termo-dilatometriche son riprodotte in fig. 5.

Anche quì si osserva, poco sotto i 100°, un brusco aumento della dilatabilità dovuto all'assestamento fisico-meccanico del materiale — e particolarmente a quello delle venule a grossi elementi — per azione del calore; dopo di che la curva termo-dilatometrica riprende un andamento quasi parallelo al primo tratto, fino alla brusca dilatazione che si inizia fra 700° e 750° per raggiungere il massimo a 800° ÷ 830°, dilatazione che precede immediatamente la contrazione in corrispondenza della decarbonatazione.

La dilatazione massima che si riscontra per un calcare

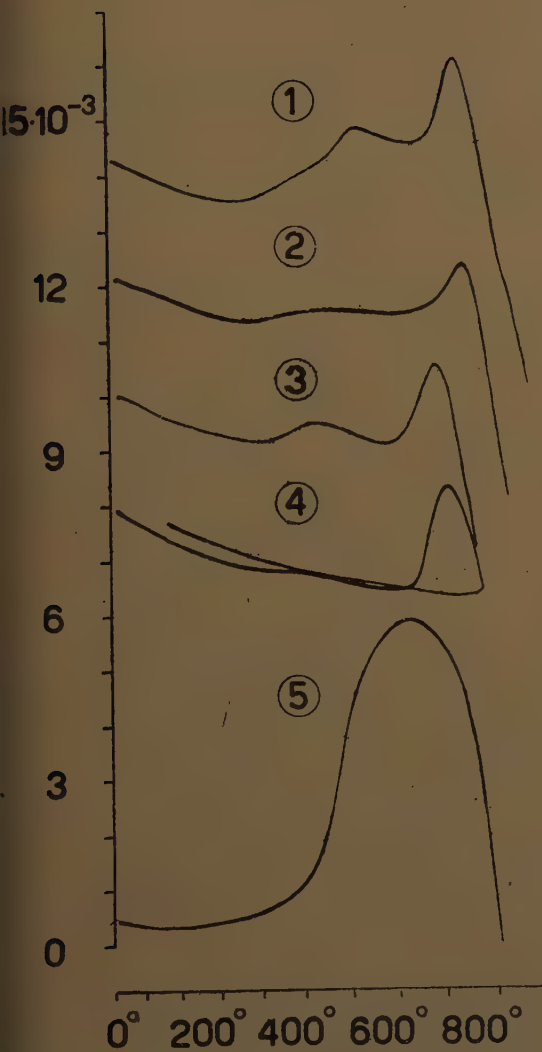


Fig. 5. — Curve termo-dilatometriche differenziali (Chevenard); (provino di cm. 2).

- N. 1 Calcare criptocristallino compatto.
- » 2 Calcare criptocristallino compatto, a grana uniforme.
- » 3 Calcare tenero con venature.
- » 4 Calcare tenero.
- » 5 Calcare la cui tessitura è indicata dalla sezione lucida n. 5 della Tav. II.

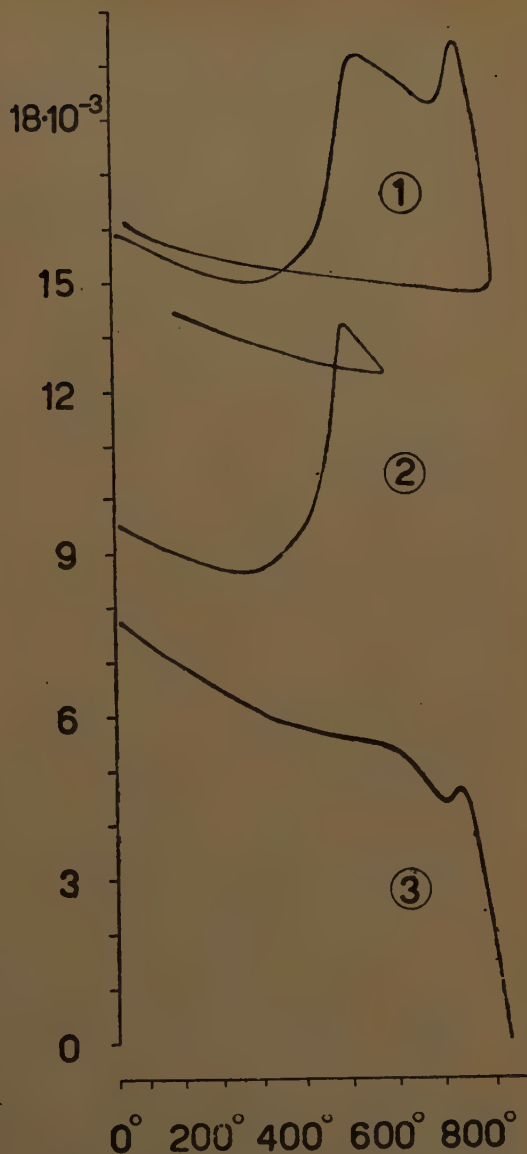


Fig. 6. — Curve termo-dilatometriche differenziali (Chevenard); (provino di cm. 2).

- N. 1 Calcare compatto, criptocristallino, proveniente dal territorio di Mondragone (Caserta).
- » 2 Un provino del medesimo calcare di cui al n. 1, riscaldato fino al completamento della prima dilatazione.
- » 3 Un provino del medesimo calcare di cui sopra, previamente trattato per alcune ore a  $1000^{\circ}$ .

te di  $\text{CO}_2$ , di  $880^\circ \div 900^\circ$  (\*) e dipende dalla porosità della roccia (trattandosi di materiale in pezzi), dalla presenza e dalla entità del contenuto di impurezze, dalla rapidità del riscaldamento, dalla pressione parziale della  $\text{CO}_2$  nell'ambiente <sup>1)</sup>.

(\*) NOTA. — Riporto qui di seguito alcune delle più recenti indicazioni fornite dalla letteratura intorno alla temperatura di decarbonatazione del carbonato di calcio.

Materiali		Metodo di indagine	Condizioni dell'ambiente di riscaldamento	Temperatura di decarbonatazione		
				inizio	fine	
Carbonato di calcio precipitato.	polvere	analisi termo-ponderale	in azoto	500°	783°	A. Richter
Calcite.	frammenti	»	»	500°	891°	P. Vallet (a)
Calcite.	polvere	»	»	500°	802°	»
Calcite.	polvere	»	all'aria	615°		»
Aragonite.	polvere	»	»	615°		G.T. Faust (b)
Calcite.	frammenti	»	in corrente di $\text{CO}_2$	900°	1034°	»
Calcite.	polvere	»	»	900°	956°	A. Richter e P. Vallet (a)
Calcite.	polvere	»	»	880°	950°	»
Carbonato di calcio precipitato.	polvere	»	»	880°	920°	Y. Schwob (c)
Marmo.	polvere	»	»	880°	950°	»

a) — RICHTER A., e VALLET P., *Sur la méthode d'étude des systèmes chimiques par variation de masse en température linéairement croissante; son application à la pyrolyse de  $\text{CaCO}_3$  dans l'azote et dans le gaz carbonique, et à l'étude des méthodes gravimétriques*, Bull. Soc. Chimique, 148 (1953).

RICHTER A., e VALLET P., *Étude de la pyrolyse de la dolomie dans l'azote et le gaz carbonique secs, en température linéairement croissante*. Rev. Metallurgie, 50; 597 (1953).

(b) FAUST G. T., *Thermal analysis studies on carbonates: I - Aragonite and Calcite*, Am. Mineral, 35; 207 (1950).

(c) — SCHWOB Y., *Les carbonates rhomboédriques simples et complexes de calcium, magnésium et fer*, Centre d'études et de recherches de l'industrie des liants hydrauliques, Publication Technique, N. 22; Paris (1950).

<sup>1)</sup> HÜTTIG G., e LEWINTER M., *Der Prozess des Kalkbrennens*, Zeit. angew. Chemie, 41; 1034 (1928).

AZBE V. J., *Fundamental mechanics of calcination and hydration of lime and methods of control*, «Symposium on Lime» - Columbus (Ohio) Regional Meeting A.S.T.M. (1939).

AZBE V. J., *Theory and practice of lime manufacture*, Rock Products, 56; 100 (1953).

SERSALE R. e GREGORIO E., *Determinazione rapida della composizione delle calci idrate, mediante l'impiego della termobilancia a registrazione continua*, Annali di Chimica, 42; 417 (1952).

SERSALE R., *Indagini sul comportamento termico delle magnesiti toscane*, Periodico di Mineralogia, XX, n. 1, 2; 165 (1951).

Si noti, sulla fig. 5, che i calcari teneri accusano la decarbonatazione a temperatura più bassa di quella individuata per i calcari cristallini, compatti.

Si è sempre osservato che le curve termo-dilatometriche differenziali dei materiali in roccia accusano, in prossimità della decarbonatazione, una brusca salita, cioè un forte aumento della dilatabilità,

Il fenomeno può essere interpretato con l'ammissione che in vicinanza della scissione, la pressione della  $\text{CO}_2$  che si genera anche a temperatura più bassa di quella che appare sulla curva termo-dilatometrica, determini la osservata caratteristica dilatazione dei provini.

Le differenze fra il comportamento termo-dilatometrico delle diverse rocce calcaree esaminate spariscono quando si saggiano le polveri da esse ricavate per macinazione.

Dette polveri sono state foggiate in un provino parallelepipedo per stampaggio, sempre nello stesso modo, a forte pressione ( $150 \text{ kgr/cm}^2$ ).

Nella fig. 7 riporto la documentazione ad esse relativa.

Si noti che all'intorno dei  $300^\circ$  si inizia una dilatazione che diviene brusca in prossimità della decarbonatazione, la quale, per le polveri, ha luogo alla temperatura di circa  $570 \div 590^\circ$ , più bassa di quella rilevata sulle curve termo-dilatometriche dei materiali in roccia.

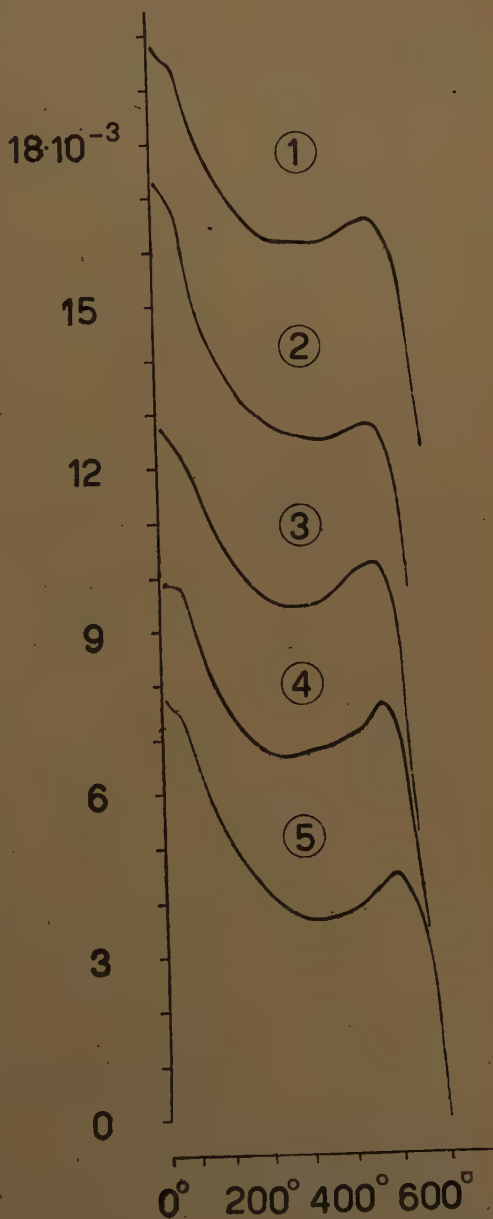


Fig. 7. — Curve termo-dilatometriche differenziali (Chevenard); (provino di cm. 5).

Polveri ottenute da alcune delle rocce calcaree di cui alle fig. 1, 2, 3 e 4.



Questa bassa temperatura di decarbonatazione è in rapporto al fatto che si saggia qui il comportamento termico di polveri in ambiente a bassissima pressione parziale di  $\text{CO}_2$ . E' noto infatti che in corrente di azoto il carbonato di calcio in polvere inizia la sua decarbonatazione a partire da  $500^\circ$  <sup>1)</sup>, mentre in corrente d'aria l'analisi termo-ponderale, eseguita

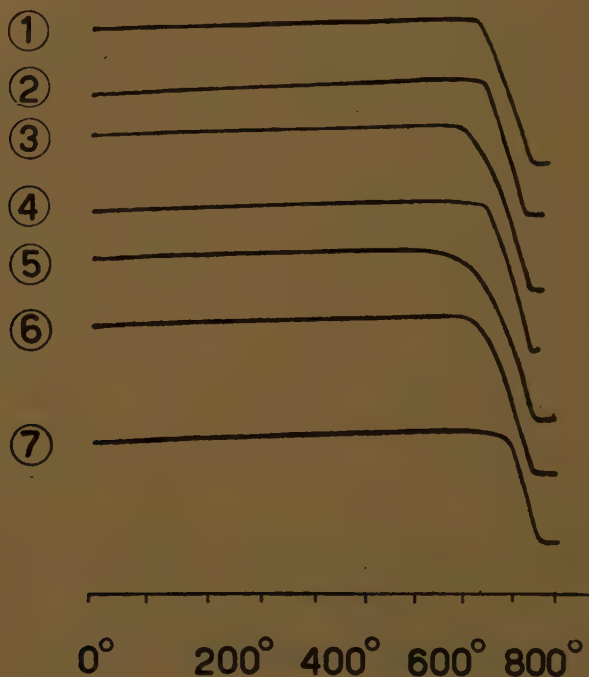


Fig. 8 — Curve termo-ponderali.

Polveri ottenute per molitura delle rocce calcaree di cui  
alle fig. 1, 2, 3, 4 e 5.

Riproduzione delle registrazioni fotografiche originali.

con termo-bilancia a registrazione fotografica, ha fornito i risultati indicati nella fig. 8.

La fig. 9 si riferisce alle curve termo-dilatometriche rilevate per l'aragonite e per la magnesite.

Temperatura e velocità di decarbonatazione dipendono dalla tessitura della roccia calcarea considerata e sono particolarmente legate alla porosità.

Supponiamo infatti di collocare un cubetto di detta roccia, in ambiente a temperatura costante  $t^0$  alla quale sia sensibile la decarbonatazione. Si

<sup>1)</sup> Vedi ad es.: RICHTER A., e VALLET P., l. c.

supponga altresì che il materiale assuma rapidamente ed omogeneamente la su indicata temperatura.

Nella pratica infatti la velocità di trasmissione del calore attraverso quei solidi: calcare e calce, è notevole e comunque superiore a quella di decarbonatazione <sup>1)</sup>.

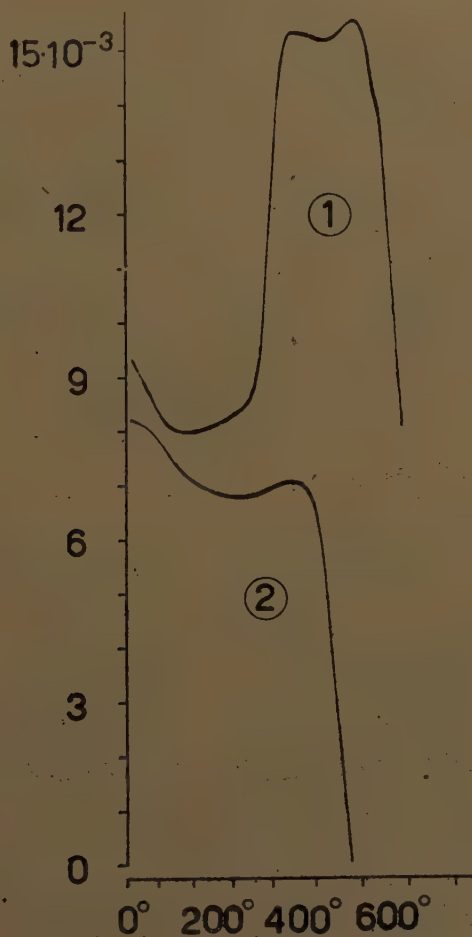


Fig. 9. — Curve termo-dilatometriche differenziali (Chevenard); (provino di cm. 5; polvere).

N. 1 Aragonite di Girgenti.

N. 2 Magnesite di Querceto Val d'Elsa.

Decarbonatazione, la quale non si inizierà però contemporaneamente per tutta la massa del materiale, bensì sulle sole facce del cubetto e pro-

<sup>1)</sup> FURNAS C. C., Ind. Eng. Chem, 23, 534 (1931). - AZBE V. J., l. c.

seguirà verso l'interno secondo una linea di demarcazione — chiaramente visibile nella fig. 10 — la cui velocità di avanzamento dipenderà dalla porosità oltre che dalla temperatura.

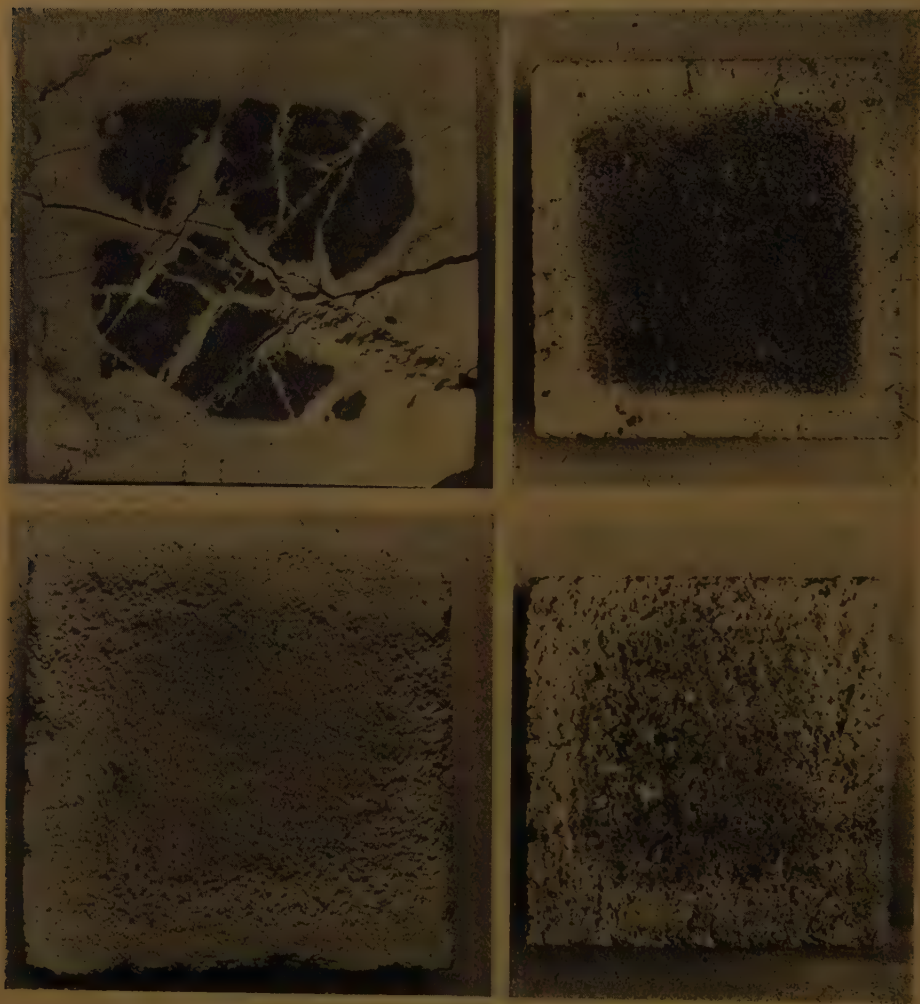


Fig. 10.

La decomposizione dello strato superficiale, sotto l'azione del calore, è in rapporto con la tensione di scomposizione  $p$  del  $\text{CaCO}_3$  alla temperatura  $t^0$ , nonchè con la pressione parziale della  $\text{CO}_2$  nell'ambiente.

Per decarbonatarsi contemporaneamente un qualsiasi strato più inter-

no, sarebbe necessario un « surplus » di pressione per vincere la resistenza che il gas carbonico incontrerebbe nel filtrare attraverso lo spessore fra la faccia del cubo e lo strato considerato. Non solo, ma è da supporre che quando la decarbonatazione avanza in profondità, alla linea di demarca-

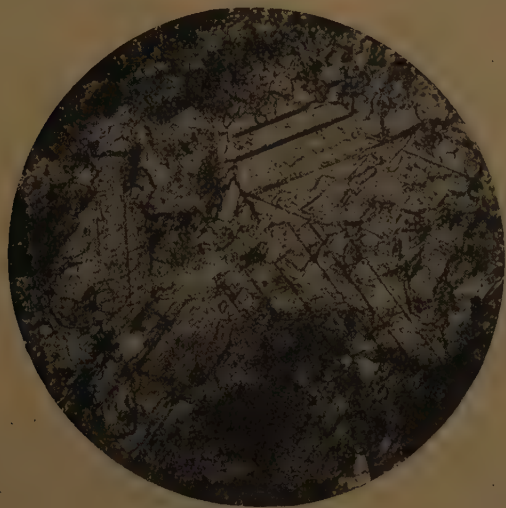


Fig. 11. — Sezione sottile, nicols //; Ingr.  $\times 60$ .

Il medesimo calcare a struttura eterogenea, riportato in tav. II con il n. 3.  
Calcare a struttura fine in alcuni punti, in altri ricristallizzato, con plaghe a calcite spatica.

zione: calcare-calce, sussista una concentrazione di  $\text{CO}_2$  più alta di quella che si ha nell'ambiente all'inizio della scissione termica degli strati superficiali.

E' evidente che, a parità di spessori, il « surplus » di pressione risulterà tanto più esiguo, cioè la decarbonatazione più facile, quanto maggiore è la porosità della roccia considerata.

*Napoli, Istituto di Chimica Industriale dell'Università.*



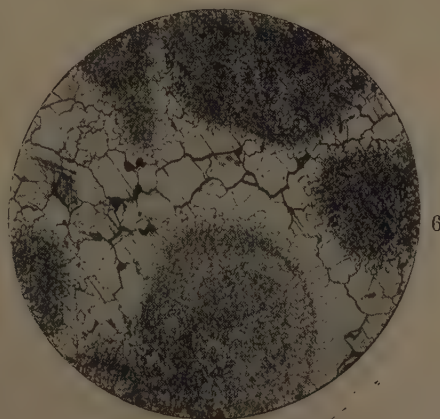
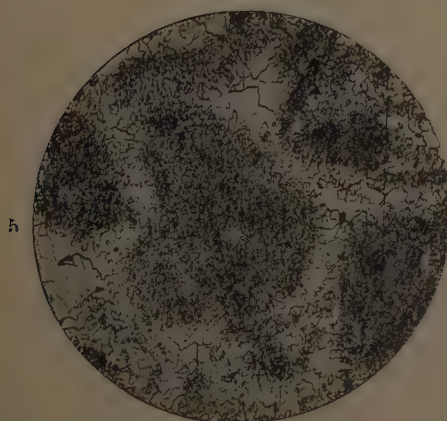
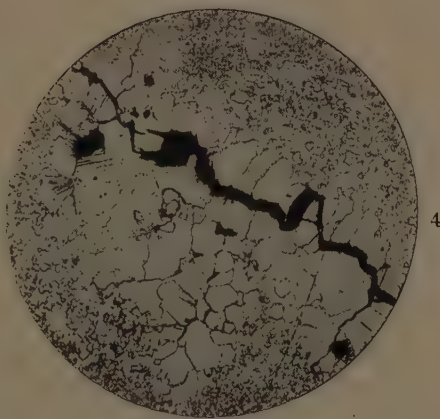
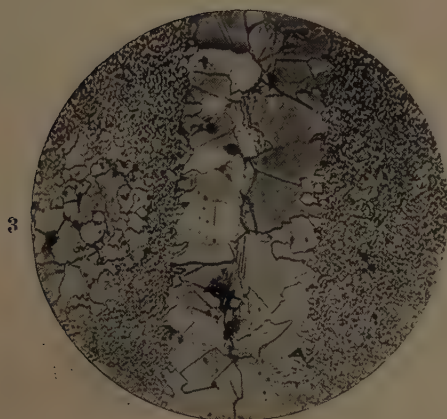
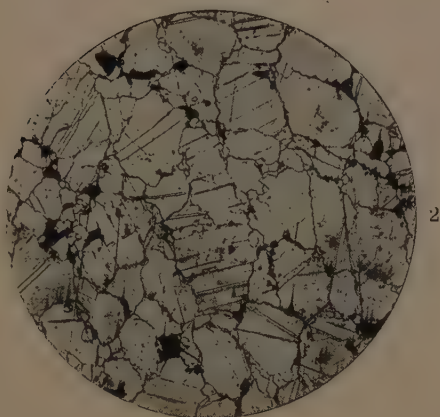
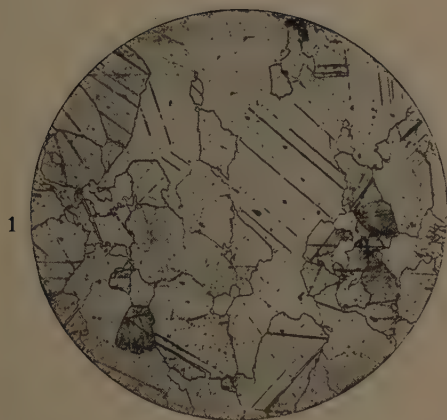
## SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE I e II

Tav. I — Sezioni lucide di marmi e calcari (attacco: nital 0,1 %).

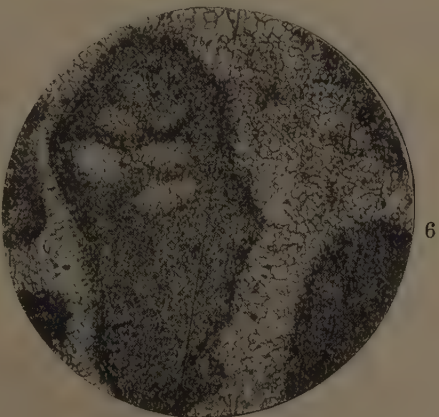
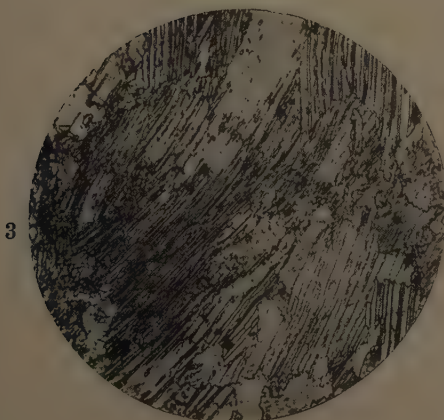
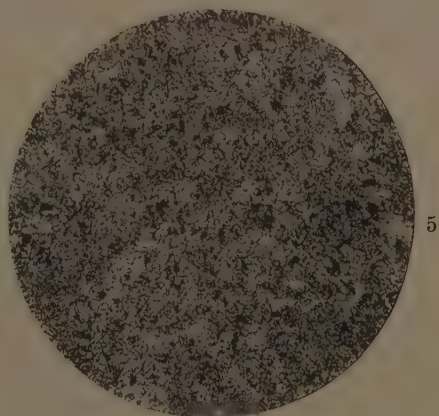
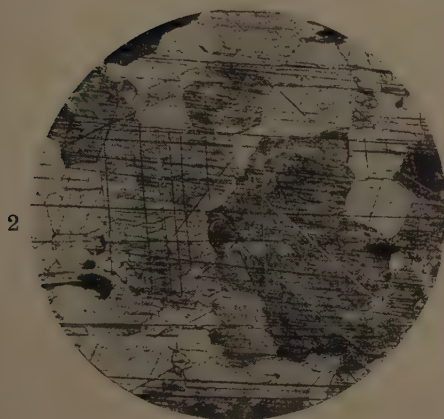
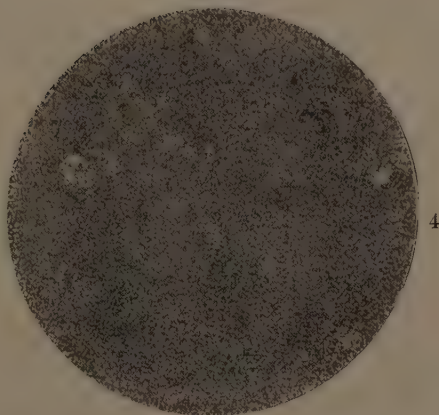
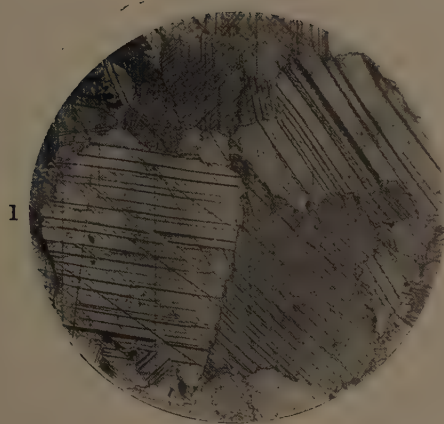
- N. 1. Marmo statuario di Carrara. - Ingr. x 40.
- 2. Marmo statuario di Carrara, dopo trattamento termico di 1 h. a 600°. - Ingr. x 40.
  - 3. Calcare criptoeristallino di Mondragone, con venule di grossi elementi cristallini. - Ingr. x 100.
  - 4. Calcare criptoeristallino di Mondragone, con venule di grossi elementi cristallini, dopo trattamento termico di 7 h. a 500°. - Ingr. x 100.
  - 5. Calcare criptoeristallino, fossilifero, di Trani. - Ingr. x 100.
  - 6. Calcare criptoeristallino, fossilifero, di Trani, dopo trattamento di 1 h. a 600°. - Ingr. x 100.

Tav. II — Sezioni lucide di marmi e calcari (attacco: nital 0,1 %).

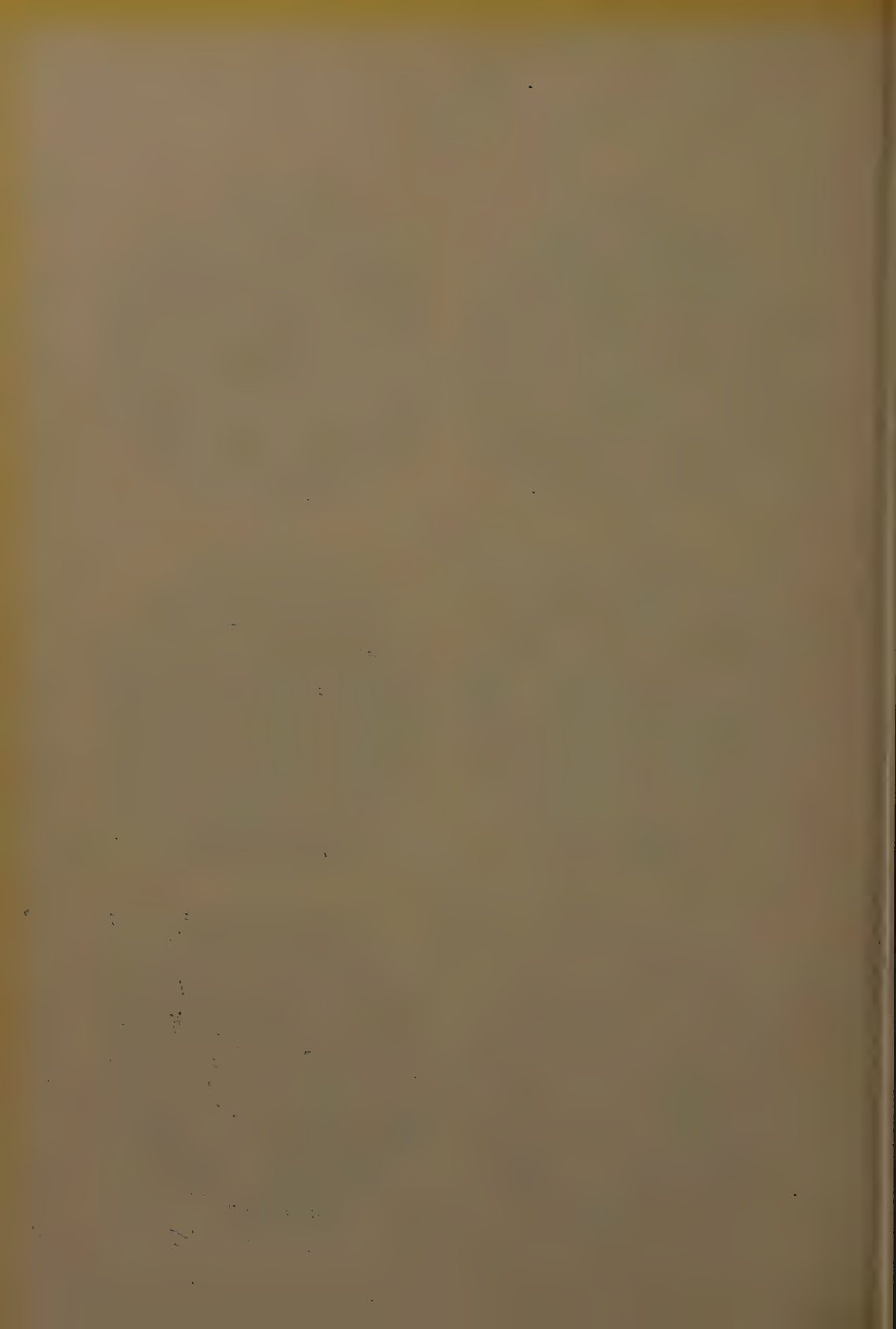
- N. 1. Marmo lamelloso alpino (Candoglia). - Ingr. x 37.
- 2. Marmo greco duro (Marmor parium). - Ingr. x 37.
  - 3. Calcare a struttura eterogenea; (cfr. esame in sezione sottile riportato in fig. 11). - Ingr. x 100.
  - 4. Calcare criptoeristallino. - Ingr. x 100.
  - 5. Calcare criptoeristallino. - Ingr. x 100.
  - 6. Calcare fossilifero. - Ingr. x 100.











OSSERVAZIONI GEOCHIMICHE SULLE ARENARIE GLAUCONITICHE  
DI PUNTA LAGNO NELLA PENISOLA DI SORRENTO

*Nota del dott. Vincenzo Minieri, presentata dal socio G. D' Erasmo*

(Adunanza del dì 7 novembre 1953)

**Sunto.** — Vengono esaminati, dal punto di vista geochimico, i rapporti esistenti tra l'origine della glauconite e l'ambiente di sedimentazione in cui avviene tale processo minerogenetico in base allo studio compiuto sulle arenarie oligoceniche di Punta Lagno, nella penisola di Sorrento.

Le genesi di minerali tipici, che si verifica nel corso della deposizione di talune rocce sedimentarie, è di solito connessa non soltanto a trasformazioni ed equilibri chimici di particolare interesse, ma altresì a determinate condizioni ambientali che favoriscono notevolmente i processi minerogenetici. Lo studio quindi di tali fenomeni consente di giungere a conclusioni di un certo interesse geochimico e si rivela di notevole aiuto nell'interpretazione delle circostanze ecologiche di sedimentazione.

Tra questi minerali, la glauconite, silicato di ferro e potassio, a composizione assai variabile, riveste un carattere di notevole importanza, anche perchè la sua origine e le modalità di formazione sono ancora discusse e non del tutto chiarite. Accertarne comunque la presenza in rocce sedimentarie costituisce pertanto un sicuro indizio per risalire non solo alla natura particolare dell'ambiente che ha favorito il processo di minerogenesi, ma altresì a considerazioni circa il destino di diffusi elementi chimici nel ciclo delle formazioni geologiche. Lo studio analitico esclusivo in un caso del genere deve essere senza dubbio convalidato opportunamente da osservazioni in posto di carattere geologico, che portano talora al rinvenimento di stadi iniziali o in via di sviluppo del fenomeno, così come esso avviene in natura.

Nell'ambito di queste indagini rientra l'argomento che forma oggetto della presente nota e che riguarda le arenarie glauconitiche facenti parte della serie stratigrafica oligocenica di Punta Lagno, a 800 metri circa a SO di Massalubrense, nella penisola di Sorrento. Qui, trasgressivo sul Cretacico, affiora, in facies arenaceo-conglomeratica, il lembo terziario, segnalato per la prima volta da WALTHER e SCHIRLITZ<sup>1)</sup> ed attribuito all'O-

<sup>1)</sup> WALTHER J. e SCHIRLITZ P. — *Studien zur Geologie des Golfes von Neapel*. Zeitschr. der Deutsch. Geol. Ges., Jahrgang 1886.

ligocene medio, in seguito al rinvenimento di *Scutella*. La serie dei terreni comprende, com'è noto, in basso un conglomerato basale formatosi a spese del complesso calcareo cretacico della penisola ed in alto strati di calcari brecciati rossicci fossiliferi, che si alternano con le arenarie verdi, glauconitiche, a stratificazione incrociata e tipicamente litorali. <sup>1)</sup>, <sup>2)</sup>, <sup>3)</sup>.

Per poter fissare il problema nei suoi esatti termini occorre anzitutto esaminarlo essenzialmente alla luce delle varie ipotesi prospettate per chiarire l'origine della glauconite, e dei legami che intercorrono tra la formazione di questa e l'ambiente di sedimentazione.

Il processo che porta alla costituzione di questo minerale è fondamentalmente di natura bio-chimica e può verificarsi particolarmente in sedimenti di origine marina, in ambiente di riduzione, favorito dall'azione di speciali batteri. Numerose prove dimostrano che senza dubbio il fenomeno è legato alla vita organica e rientra nel ciclo geochimico del silicio nella materia vivente, ma le relazioni intercorrenti in tal senso non inducono ad escludere che esso possa verificarsi ugualmente senza l'intervento degli organismi. È opinione ormai generalmente accettata che tanto l'origine del minerale, quanto le condizioni biochimiche o strettamente chimiche che la favoriscono, possano variare ed offrire così campo ad interpretazioni di duplice aspetto, ma entrambe estremamente probabili.

Secondo MURRAY e RENARD <sup>4)</sup>, la glauconite si forma nell'interno di conchiglie di foraminiferi o in frammenti organici anche diversi, in cui penetra sottile fango di fondo sul quale agisce la materia organica in decomposizione dell'animale morto. In seguito a questa azione, il ferro della fanghiglia, in presenza dei solfati contenuti nell'acqua marina, si trasforma in solfuro e si ossida successivamente ad idrossido ferrico. Nello stesso tempo, mentre l'allumina viene allontanata per solubilizzazione dai sedimenti, si libera silice colloidale. Quest'ultima reagisce con l'idrossido ferrico, che a sua volta assorbe il potassio dai sali presenti nell'ambiente, di guisa che la reazione definitiva conduce alla formazione del silicato di ferro e di potassio.

Recentemente alcuni autori <sup>5)</sup> hanno sperimentalmente osservato che

<sup>1)</sup> WALTHER J. — *I vulcani sottomarini del Golfo di Napoli*. Boll. Com. Geol. Ital., vol. XVII, pag. 365. Roma, 1886.

<sup>2)</sup> BEHRMANN R. B. — *Ein oligozänes kliff bei Sorrent in Südtalien*. Zeitschr. Deutsch. Geol. Ges., B. 86, pag. 155-158, 1934.

<sup>3)</sup> PRINCIPI P. — *Sulla estensione dell'oligocene nell'Appennino meridionale*. Boll. Soc. Geol. Ital., vol. LIX, fasc. 2, pag. 188. Roma, 1940.

<sup>4)</sup> MURRAY J. e RENARD A. F. — *Deep-Sea Deposits*. Challenger Reports, p. 525. London, 1898.

<sup>5)</sup> TAKAHASHI J. e YAGI T. — *The peculiar mud-grains in the recent littoral and estuarine deposits, with special reference to the origin of glauconite*. Ann. Rep. Saito Ho-on Kai, 5, 1929.

esiste stretta relazione tra la genesi della glauconite e particelle organiche in putrefazione.

Altri studiosi, come il GALLIHER <sup>1)</sup>, ammettono invece che l'origine del minerale è connessa alla trasformazione della biotite, senza intervento alcuno di sostanza organica. Le pagliuzze di mica presentano, secondo l'autore, una serie di trasformazioni in superficie e lungo i piani di sfaldatura. Le particelle perdono allora la loro forma laminare, si rigonfiano e diventano pressochè tondeggianti; l'alterazione definitiva conduce infine a quella struttura interna, più o meno amorfa, che caratterizza i granuli di glauconite. Ed il fenomeno è di solito frequente in bacini non interessati da movimenti ondosi rilevanti, i cui fondi erano ricoperti da fanghiglia nerastra. Il ferro bivalente della mica si ossiderebbe a trivalente secondo la reazione:  $2 \text{FeO} + \text{H}_2\text{O} = 2\text{H} + \text{Fe}_2\text{O}_3$ , in seguito ad un processo di fermentazione. La trasformazione, oltre l'ossidazione del ferro, implica da parte della biotite la perdita di piccole quantità di allumina, potassio e magnesio e talune condizioni favorevoli, quali l'alcalinità della soluzione, un ambiente anaerobico e la tranquilla e lentissima deposizione dei sedimenti per una continua e costante azione diagenetica.

L'autore generalizza tanto la sua ipotesi da escludere che il minerale possa formarsi diversamente o che comunque possa essere messo in relazione alla sostanza organica.

È invece estremamente probabile che in tutti i casi il processo finale sia identico, vale a dire assorbimento del potassio e della silice solubile da parte dell'idrossido ferrico colloidale. In ambienti ricchi di minerali provenienti da circostanti rocce sedimentarie, l'origine prima del ferro continentale è legata al trasporto da parte delle acque dilavanti, in quelli più o meno connessi a masse di rocce ignee, il ferro deriva dalle miche biotitiche.

Premesse queste considerazioni di carattere generale, ritengo di dover interpretare, in base ai risultati analitici conseguiti, la genesi della glauconite nelle arenarie di Punta Lagno secondo l'ipotesi più strettamente biochimica, anche perchè l'osservazione in posto mi ha permesso di constatare che le sabbie verdi di quella serie oligocenica risultano disseminate di noduli pressochè ellissoidali di grandezza varia, di tinta gialla, dovuti alla precipitazione d'idrossido ferrico colloidale intorno ad un nucleo di condensazione che presenta tutti i caratteri di sostanza organica carbonizzata, derivata dalla diagenesi, in ambiente batterico riducente, di alghe marine microscopiche. Essi rappresentano pertanto lo stadio iniziale del processo minerogenetico: il ferro, senza dubbio continentale, mescolato nella fanghiglia di fondo del bacino, si ossida e si trasforma in idros-

<sup>1)</sup> GALLIHER E. W. - *Glauconite genesis*. Bull. Geol. Soc. Am., 46, 1935.



sido ferrico colloidale, condensandosi intorno alle particelle più o meno carbonizzate di sostanza organica. La estrema ricchezza della silice, di cui si rivela costituita anche l'arenaria, la presenza delle piccole quantità di magnesio e di potassio, crea nell'ambiente quegli equilibri necessari perchè l'idrossido ferrico assorba la silice, il magnesio, ed in ultimo il potassio, per dare in definitiva i granuli ed il pigmento glauconitici.

L'analisi chimica dell'arenaria, che riporto qui di seguito, dà ragione di tale interpretazione.

*Dati analitici riassuntivi*

SiO <sub>2</sub>	63.35
TiO <sub>2</sub>	tr.
ZrO <sub>2</sub>	tr.
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	6.70
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	1.03
FeO	1.47
MnO	tr.
MgO	1.62
CaO	14.10
K <sub>2</sub> O	0.55
Na <sub>2</sub> O	0.08
CO <sub>2</sub>	10.56
H <sub>2</sub> O	0.49
Totale	99.95

Il procedimento analitico è stato eseguito operando su due grammi di sostanza. L'anidride carbonica, il ferro ferroso e l'acqua sono stati determinati con i comuni metodi. Il manganese è stato dosato colorimetricamente. Dai dati ottenuti si rileva che la lieve quantità di calcio in eccesso, sottratta quella legata all'anidride carbonica, deve ritenersi combinata a piccole quantità di silice e di allumina, al magnesio e al potassio, che rappresentano i normali costituenti della glauconite.

L'analisi rivela altresì che la presenza nell'ambiente marino di sedimentazione degli elementi rinvenuti, favorì la genesi di quel minerale in seno al tipo litologico del sedimento che vi si accumulava.

*Conclusioni di carattere geologico.*

Chiarita con le considerazioni svolte in precedenza la genesi della glauconite presente nelle arenarie di Punta Lagno, desidero ora esporre alcuni risultati d'interesse più strettamente geologico, relativi alle condi-

zioni di sedimentazione del bacino in cui si depositò quella serie oligocenica.

Tenuto conto che la presenza della glauconite non lascia dubbio alcuno sul carattere marino di quei sedimenti — in concordanza con i resti fossili rinvenuti — si ha ragione di ritenere, in base al processo minerogenetico di cui si è parlato e le varie e semplici trasformazioni attraverso le quali esso si compie, che la deposizione dovette avvenire in una baia tranquilla, poco profonda, a temperatura sub-tropicale e sottoposta a lento movimento ondoso, che rimescolava la fanghiglia di fondo. E' noto difatti che il minerale predetto si rinviene nelle attuali acque marine a profondità che si può ritenere litorale ed è rarissimo nei bacini degli abissi oceanici.

L'associazione di glauconite con cristallini di quarzo, frammenti di calcite ed altri minerali vari è dovuta a deposizione secondaria, che origina stratificazione incrociata, sicchè i granuli del silicato si mostrano consunti ed abrasi, assumendo quella forma tipica che vien detta « botrioidale ».

Infine, data la natura del bacino di sedimentazione, non sembrerebbe di dover ammettere, con BEHRMANN <sup>1)</sup>, una serie di trasgressioni e regressioni di notevole importanza che dovettero interessare quella zona, bensì più semplici fenomeni di comuni oscillazioni marine frequenti lungo i litorali.

*Napoli, Istituto geo-paleontologico dell' Università, novembre 1953.*

---

<sup>1)</sup> L. c.



**ATTILIO COLACEVICH**

N. a Fiume, 25 luglio 1906.

M. a Napoli, 24 agosto 1953.

## ATTILIO COLACEVICH

*Commemorazione letta dal prof. Tito Nicolini*

(Adunanza del dì 5 dicembre 1953)

Il 24 agosto 1953, dopo 8 mesi di lotta strenua contro il male che ne aveva demolita la resistenza fisica moriva Attilio COLACEVICH, direttore dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte. La notizia subito diffusa destava in Italia e fuori unanime cordoglio, per l'età relativamente giovane dello scomparso, per il suo valore che ne faceva uno dei nostri maggiori astronomi, e per le cordiali relazioni che aveva estese ovunque.

Attilio COLACEVICH nacque a Fiume il 25 luglio 1906, e si laureò in Fisica a pieni voti nel 1929. Fu incaricato delle funzioni di Assistente alla cattedra universitaria, da cui dipende l'Osservatorio di Arcetri, dal dicembre 1931; nel 1933 entrò in seguito a concorso nel ruolo degli Osservatori Astronomici e fu assegnato ad Arcetri.

Nel 1934 ebbe una borsa di studio della fondazione Rockefeller e trascorse 10 mesi presso l'Osservatorio di Lick sul monte Hamilton in California, visitando nel contempo anche gli Osservatori del monte Wilson e di Flagstaff (Arizona). Nel dicembre 1937 conseguì la libera docenza, ed ebbe la promozione di Astronomo Aggiunto nel 1940, riuscendo primo in classifica. A quest'epoca aveva concluso una trentina di lavori in campi vari. Un gruppo riguardava le cefeidi (Pubblicazioni N. 1, 2, 3 dell'elenco), ed era principalmente un tentativo di verificare se le variazioni di temperatura ricavate in due modi diversi (dalle variazioni d'intensità dello spettro continuo, oppure da quelle di alcune righe spettrali) concordano più o meno in fase ed ampiezza. Oltre ai calcoli d'orbite di varie stelle doppie (Pubbl. N. 5, 6, 9, 10) visuali e spettroscopiche ( $\delta$  31  $\tau$  Persei,...), un altro gruppo elabora studi statistici sulle doppie spettroscopiche. Viene rilevata (N. 9) una nuova determinazione statistica del rapporto delle masse delle due componenti, nel caso che una sola di essa abbia spettro osservabile, ed usando la relazione massa-luminosità. Un altro notevole lavoro successivo dello stesso argomento è il N. 16. E' anche trovata (N. 12) una stretta correlazione tra i periodi di rivoluzione medi osservati nei sistemi spettroscopici e quelli minimi calcolati in base ai raggi delle stelle di differente tipo spettrale. La nota N. 14 è una verifica della relazione mas-



sa-luminosità pei sistemi binari spettroscopici, verifica che risulta soddisfatta per 83 sistemi su 112 esaminati.

L'attività scientifica del valoroso scomparso era dunque brillantemente avviata, e continuò negli anni seguenti, sempre altamente apprezzata e varia, ciò che gli era consentito dalla sua vasta preparazione. Così eseguì ricerche col prof. ABETTI sulla temperatura e spettro di una notevole macchia solare e sulle intensità di eruzioni cromosferiche (Pubbl.ni N. 20 e 22); costruì un predispersore per la Torre solare usandolo per la determinazione del profilo della riga  $H_{\alpha}$ ; ecc.

Dal 1941 il suo interesse per l'ottica strumentale divenne assai vivo, tanto da farne un eminente specialista molto apprezzato, e la sua attività in questo campo è dimostrata da una quindicina di lavori, in gran parte riferiti nell'elenco. Merita un rilievo particolare a questo riguardo la teoria del telescopio Schmidt (Pubbl. N. 28 ecc.), e la realizzazione dello strumento (con specchio sferico di Pyrex di 50 cm e lastra corretttrice di 30 cm.) per l'Osservatorio di Arcetri.

Ancora ad Arcetri, ed in collaborazione con M. C. BALLARIO, calcolò le velocità spaziali di 2459 stelle brillanti, e per circa 800 studiò i moti preferenziali; è anche da rilevare una ricerca di questo gruppo statistico, sulle relazioni analitiche tra le distribuzioni delle velocità lineari delle stelle (Pubbl.ni N. 31, 32, 34, 36).

La nomina del prof. COLACEVICH a direttore dell'Osservatorio di Capodimonte, con decorrenza dal 16 giugno 1948, ebbe luogo in seguito a concorso dell'anno precedente, contemporaneamente a quelle dei proff. G. CECCHINI ed E. L. MARTIN. Nella direzione dell'Osservatorio il COLACEVICH succedeva al prof. L. CARNERA, ed il decreto di trasferimento ebbe luogo in data 3 nov. 1948. Tuttavia data una missione scientifica del prof. ABETTI in Egitto, Egli lo sostituì in Arcetri; trascorse poi ancora buona parte del 1948 all'Osservatorio Warner e Swasey di Cleveland (Ohio) ed al Mac Donald; e rimase praticamente ad Arcetri fino al novembre 1950.

L'Osservatorio di Capodimonte aveva tradizionalmente un indirizzo posizionale, nel quale si era creata una eminente fama in passato; il prof. COLACEVICH, dopo i lunghi anni spesi immensamente nella preparazione astrofisica, iniziò con zelo ed acume alcune trasformazioni per sostituire ai vecchi equatoriali, Fraunhofer e Dollond, attrezzature astrofisiche moderne; e diciamo pure subito che sarebbe via via arrivato ad importanti realizzazioni astrofisiche se la sua attività non fosse stata immaturamente troncata dalla morte.

Con l'aiuto delle Officine Galileo di Firenze, Egli aveva realizzata una camera fotografica con la straordinaria luminosità  $f/0.5$ , e la usò con accessori spettrografici, per esempio per studiare la spettrofotometria della eclisse totale di Luna del 2 aprile 1950.

Nel 1951, coadiuvato dall'aiuto A. KRANJC e dal tecnico CASELLA, ap-

pliocò al Fraunhofer, di 17 cm d'apertura, un fotometro fotoelettrico del tipo G. E. Kron, costruito a Capodimonte. Esso comprende la colonna ottica con il sistema di puntamento, il circuito della fotocellula (tipo 1P21), il circuito di amplificazione, ed un registratore. Questo fotometro, senza filtro, permette di arrivare circa alla grandezza 9. Due delle ultime pubblicazioni del COLACEVICH, come può vedersi nell'elenco, si riferiscono a questo apparecchio, e lo studio delle variabili ad eclisse è stato poi proseguito particolarmente dal FRESA.

Nel dicembre 1951 partì come membro della spedizione Italiana per lo studio della eclisse solare del 25 febbraio 1952, diretta dal prof. G. ABETTI, e comprendente anche G. RIGHINI e M. G. FRACASTORO. La spedizione si stabilì presso Khatoum nel Sudan. Con lo spettrografo ad alta luminosità sopra accennato, il COLACEVICH poté ottenere lo spettro della corona esterna a distanza di due diametri solari dal lembo. Nella stessa occasione il COLACEVICH riuscì a fotografare lo spettro del cielo; in precedenza solo di notte si era riusciti a questo.

Successivamente il COLACEVICH volle iniziare la costruzione di un coronografo; è da notare che a Capri due stazioni solari, una impiantata dal prof. Y. ÖHMAN, l'altra dal prof. K. O. KIEPENHEUER, dispongono di un simile strumento; e che questo darebbe possibilità di collaborare col Centro Studi sulla Radionavigazione e Radiopropagazione, diretto dal prof. E. CARLEVARO.

Il grande basamento e la struttura ottico-meccanica principale fu provvista dal COLACEVICH per l'interessamento generoso del prof. G. ABETTI, mentre il filtro monocromatico polarizzante del Lyot è stato dallo scrivente richiesto con le forniture E. R. P., tenuto conto di prove di dubbio risultato effettuate all'Officina dell'Osservatorio. Questo coronografo è purtroppo l'ultima opera impiantata dal compianto direttore a Capodimonte: una attività così molteplice e costruttiva veniva troncata dalla morte immatura.

La perdita che l'Osservatorio di Capodimonte ha subita con la morte del COLACEVICH, può valutarsi in sintesi dalle semplici frasi seguenti, estratte dalla lettera di compianto del prof. Otto STRUVE, direttore del Berkeley Astronomical Department dell'Università di California: « Egli fu uno dei più attivi astronomi europei, e le sue cognizioni di spettroscopia stellare ne facevano un membro particolarmente apprezzato del distinto gruppo di astrofisici italiani. Il suo valore era degno dei suoi famosi predecessori, SECCHI, RESPIGHI, ABETTI, ed altri ».

Le spoglie mortali del compianto direttore, che tutti noi dell'Osservatorio di Capodimonte amavamo anche per il suo carattere amichevole, mite, modesto, riposano nel piccolo Cimitero di S. Felice a Ema, presso Arcetri. All'attività scientifica e direzionale dell'illustre scomparso, occorre

aggiungere l'insegnamento per incarico dell'Astronomia, alla Università ed all'Istituto Universitario Navale.

L'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, nell'adunanza del 2 giugno 1951 lo aveva eletto Socio Corrispondente ad unanimità; e l'11 giugno 1953 era anche stato eletto, primo in terna, Socio Corrispondente dell'Accademia Nazionale dei Lincei. Era inoltre Membro della Società Astronomica Italiana facente parte del Comitato di Redazione delle Memorie; e membro della Unione Astronomica Internazionale, per le Commissioni 9 (Strumenti) e 29 (Spettri Stellari).

## ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DEL PROF. ATTILIO COLACEVICH

### ABBREVIAZIONI

O. e M. A. = Osservazioni e Memorie dell'Osservatorio Astrofisico di Arcetri.  
Ap. J. = Astrophysical Journal.  
C. C. = Contributi Astronomici dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte.  
C. M. C. = Collezione Miscellanea dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte.  
PASP = Publications of the Astronomical Society of the Pacific.

1. *Variabilità delle righe dell'idrogeno e del calcio nello spettro di alcune Cefeidi.* O. e M. A., fasc. 47, p. 13, 1930.
2. *Ricerche spettrofotometriche sulla variabile  $\mu$  Aquilae.* O. e M. A., fasc. 50, p. 19, 1952.
3. *Ricerche spettrofotometriche sulle variabili V 350 Sagittarii ed U Aquilae.* O. e M. A., fasc. 51, p. 49, 1933.
4. *The variable radial velocity of  $\delta$  Scuti.* Lick Obs. Bull. 478.
5. *L'orbita della doppia visuale  $\delta$  31.* Rend. Lincei vol. 18, 1933.
6. *L'orbita della doppia spettroscopia  $\tau$  Persei.* Idem c. s.
7. *Eccesso di calore e riga K del calcio interstellare nell'assorbimento interstellare.* Rend. Lincei vol. 18, 1933.
8. *Osservazioni spettroscopiche della stella variabile RS Ophiuchi (Nova Ophiuchi 1901)* Rend. Lincei, vol. 18, 1933.
9. *Provisional element of the spectroscopic binaries  $\xi$  Phoenicis and  $\upsilon$  Octantis.* PASP, 47, p. 84, 1935.
10. *Gli elementi orbitali di  $\upsilon$  Octantis.* Rend. Lincei, 1935.
11. *Relazioni tra le grandezze assolute e le altre caratteristiche fisiche dei sistemi spettroscopici binari.* O. e M. A., fasc. 52, p. 53, 1934.
12. *Le doppie spettroscopie nel diagramma di Russel dell'evoluzione stellare.* O. e M. A., fasc. 53, p. 1, 1935.
13. *Fotometria dell'eclisse totale di Luna dell'8 gennaio 1936.* O. e M. A., fasc. 54, p. 47, 1936.
14. *Sulla relazione tra la massa e la luminosità per le stelle spettroscopiche binarie.* O. e M. A., fasc. 54, p. 65, 1936.
15. *Metodi e misure di rotazione stellare.* O. e M. A., fasc. 55, p. 11, 1937.
16. *Sul rapporto della massa delle componenti nei sistemi spettroscopici binari.* O. e M. A., fasc. 56, 1938.
17. *L'eclisse del 1937 nel sistema  $\xi$  Aurigae.* Idem c.s.
18. *Le dimensioni assolute dei sistemi fotometrici.* Idem c.s.

19. *Intensità delle perturbazioni solari*. O. e M. A., fasc. 57, 1939 (in collab. con M. Viaro).
20. *Temperatura e spettro di una notevole macchia solare*. O. e M. A., fasc. 58, 1939 (in collab. con G. Abetti).
21. *Fotometria della eclisse di Luna del 7-8 novembre 1938*. Idem c.s.
22. *Intensità di eruzioni osservate al bordo del Sole*. Idem c.s. (in collab. con G. Abetti).
23. *Il predispersore della Torre solare di Arcetri e profilo della riga H*. Idem c.s.
24. *Osservazioni ed elementi orbitali di alcuni sistemi spettroscopici binari*. O. e M. A., fasc. 59, 1941.
25. *Osservazioni spettrofotometriche della variabile AC Herculis*. Idem c.s. (in collab. con A. Masani).
26. *Costruzione di un telescopio Schmidt*. O. e M. A., fasc. 61, 1943.
27. *Il telescopio Schmidt*. Pubbl. Ist. Naz. Ottica, N. 296, 1941.
28. *Teoria del telescopio Schmidt*. Idem c.s., N. 311, 1942.
29. *Il calcolo delle aberrazioni del 3° ordine in un sistema di diottri sferici centrali, sulla base dell'ottica ondulatoria*. Idem c.s., N. 321, 1942.
30. *Sulle parallassi dinamiche dei sistemi binari visuali con elementi orbitali noti*. O. e M. A., fasc. 62, 1944.
31. *Generalità e calcolo delle velocità spaziali di 2459 stelle*. O. e M. A., fasc. 63, 1946 (in collab. con M. C. Ballario).
32. *Relazioni analitiche tra le distribuzioni delle velocità lineari delle stelle*. O. e M. A., fasc. 64, 1948.
33. *Sistemi ottici a simmetria centrale e loro applicazioni*. Idem c.s.
34. *Moto preferenziale di 236 stelle*. Idem c.s. (in collab. con M. C. Ballario).
35. *Sulla distribuzione delle macchie solari*. O. e M. A., fasc. 65, 1949.
36. *Moto preferenziale di 454 stelle*. Idem c.s. (in collab. con M. C. Ballario).
37. *Risultati preliminari sul sistema di 32 Cygni*. O. e M. A., fasc. 68, 1953 (in collab. con M. G. Fracastoro).
- 38) *The spectrum of Nova Scuti*. Ap. J., vol. III, 1950, p. 197.
39. *Note on the spectral classification of carbon stars in the infrared*. Ap. J., vol. III, 1950, pag. 199.
40. *Misure fotometriche di luce zodiacale*. Rend. Acc. Naz. Lincei, serie 8, vol. 8, fasc. 3.
41. *Radial velocities of 15 stars of the RR Lyrae type*. Ap. J., vol. III, p. 437, 1950.
42. *Occasional spectrographic observations of eclipsing binaries*. Ap. J., vol. III, p. 658, 1950.
43. *L'ultravioletto e l'infrarosso nello spettro solare*. Scientia, 1950, p. 135.
44. *Studio del sistema monocentrico formato da 3 spacchi sferici*. C. C. serie 2, vol. 4, n. 3, 1950.
45. *Condizione per l'annullamento dell'aberrazione monocromatica di qualsiasi ordine in un sistema monocentrico*. C. C. serie 2<sup>a</sup>, vol. 4, n. 4, 1950.
46. *La binaria ad eclisse DM Persei*. C.C., serie 2<sup>a</sup>, vol. 4, n. 7, 1950.
47. *Spettrofotometria della eclisse totale di Luna del 2 aprile 1950*. C.C., serie 2<sup>a</sup>, vol. 4, n. 8, 1950.
48. *Il sistema doppio DM Persei*. C.C., serie 2<sup>a</sup> vol. 3, n. 13, 1950.
49. *Su una possibile deviazione della luce attraverso la nebulosa delle Pleiadi*. C.C., serie 2<sup>a</sup>, vol. 3, n. 15, 1951.
50. *Un problema di ottica strumentale in Astronomia*. C. M. C., n. 1, 1951.
51. *Risultati preliminari relativi allo spettro della corona esterna ottenuti nella eclissi totale di sole del 25 febbraio 1952*. C.C., serie 2<sup>a</sup>, vol. 3, n. 16, 1952.
52. *Misure di polarizzazione della luce della corona eseguite in occasione della eclissi totale di sole del 25 febbraio 1952 a Khartoum*. C.C., serie 2<sup>a</sup>, vol. 3, n. 17, 1952.



53. *Il fotometro fotoelettrico dell'Osservatorio di Capodimonte. Elementi provvisori di V 451 Ophiuchi.* C.C., serie 2<sup>a</sup>, vol. 4, n. 11, 1952.
54. *La variabile ad eclisse V 451 Ophiuchi.* C.C., serie 2, vol. 4, n. 12, 1952.
55. *Odierni indirizzi ottici nella costruzione dei grandi strumenti per l'astronomia.* C. M. C., n. 2, 1952.
56. *La materia interstellare.* C. M. C., n. 3, 1952.
57. *Fotometria stellare a Capodimonte.* C. M. C., n. 4, 1952.

*Nota:* Sono escluse dall'elenco pubblicazioni frammentarie di osservazioni posizionali e di occultazioni di stelle e piccoli pianeti, in genere riportate dalle Memorie della Società Astronomica Italiana (Memorie che comprendono le pubblicazioni di Arcetri date nell'elenco); come pure sono esclusi vari articoli astronomici di carattere prettamente divulgativo.

---

# UN' OSSERVAZIONE SU DI UN CRITERIO DI STABILITÀ DEL ROUTH

*Nota del dott. Luigi Salvadori, presentata dal socio Carlo Tolotti*

(Adunanza del dì 7 novembre 1953)

**Sunto.** — Si osserva che una limitazione sul carattere della stabilità dei moti merostatici di un sistema olonomo a coordinate ignorabili, contenuta in un criterio del ROUTH, non è essenziale.

1. Sia  $S$  un sistema materiale a vincoli olonomi, bilaterali, lisci ed indipendenti dal tempo, soggetto ad una sollecitazione conservativa di potenziale  $U$ .

Riferito tale sistema ad una  $n$ -pla di coordinate lagrangiane indipendenti  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , supponiamo che i parametri  $q_1, q_2, \dots, q_m$  ( $m < n$ ) abbiano carattere ciclico, cioè che i coefficienti della forza viva  $T$  e la funzione  $U$  non dipendano dalle coordinate  $q_1, q_2, \dots, q_m$ . In questa ipotesi le equazioni del moto ammettono gl'integrali dei momenti <sup>1)</sup>

$$(1) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

ove  $c_1, c_2, \dots, c_m$  designano  $m$  arbitrarie costanti d'integrazione.

Mediante le (1), di cui è assicurata la risolubilità rispetto alle  $\dot{q}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), si può dare alla forza viva  $T$  l'espressione

$$T^* = T_2^* + T_0^*,$$

essendo  $T_2^*$  una forma quadratica definita positiva nelle  $\dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, \dots, \dot{q}_n$  con coefficienti dipendenti da  $q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_n$  ed indipendenti dalle costanti  $c_i$ , mentre  $T_0^*$  designa una funzione di grado zero nelle  $\dot{q}$  e dipendente da  $q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_n$  nonchè dalle  $c_i$ .

Consideriamo i moti merostatici di  $S$ , cioè i moti in cui si conservano costanti i parametri non ignorati  $q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_n$ , ovvero nulle le velocità

---

<sup>1)</sup> Per i richiami contenuti in questo n., cfr. p. es. LEVI CIVITA ed AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, V. II, P. I, Bologna, Zanichelli, 1951, cap. V, n. 45, 46.

$\dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, \dots, \dot{q}_n$ . Ove si tenga conto delle (1) si riconosce che rimangono costanti anche le velocità  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m$ .

Sia  $\bar{\sigma}$  uno generico di tali moti, per il quale si abbiano i valori costanti

$$(2) \quad q_{m+\alpha} = \bar{q}_{m+\alpha}, \quad \dot{q}_i = \bar{\dot{q}}_i, \quad \ddot{q}_{m+\alpha} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; \alpha = 1, 2, \dots, n-m);$$

diremo  $\bar{c}_i$  i valori delle costanti  $c_i$  ad esso relative e  $\bar{T}^*, \bar{T}_0^*$  l'espressione di  $T^*, T_0^*$  una volta posto  $c_i = \bar{c}_i$ .

Un noto criterio indicato dal Routh <sup>1)</sup>, nell'ipotesi che la funzione  $\bar{T}_0^* - U$  risulti per i valori  $\bar{q}_{m+\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n-m$ ) minima effettiva, assicura la stabilità ridotta del moto  $\bar{\sigma}$ , rispetto però alle sole perturbazioni di esso subordinate alle condizioni  $c_i = \bar{c}_i$ ; tali cioè che pei corrispondenti moti variati sia

$$(3) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \bar{c}_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Con la presente Nota osserviamo che questa limitazione sul carattere della stabilità di  $\bar{\sigma}$  non è essenziale; precisamente dimostriamo il teorema:

*Se la funzione  $\bar{T}_0^* - U$ , per i valori  $\bar{q}_{m+\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n-m$ ), è minima effettiva si ha, per il moto  $\bar{\sigma}$ , stabilità ridotta ai parametri  $\dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, \dots, \dot{q}_n$ ;  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m$ , rispetto a tutte le (piccole) perturbazioni di esso.*

2. A tale scopo cominciamo col notare che essendo  $T_2^*$  una forma quadratica definita positiva nelle  $\dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, \dots, \dot{q}_n$ , dall'ipotesi del minimo effettivo di  $\bar{T}_0^* - U$  per i valori  $\bar{q}_{m+1}, \bar{q}_{m+2}, \dots, \bar{q}_n$ , segue che la funzione

$$\bar{H}^* = \bar{T}^* - U = T_2^* + (\bar{T}_0^* - U)$$

delle variabili  $\dot{q}_{m+\alpha}, \dot{q}_{m+\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n-m$ ), è minima effettiva per i valori  $\bar{q}_{m+\alpha}, \dot{q}_{m+\alpha} = 0$ .

Consideriamo ora i  $2n - m$  parametri  $\dot{q}_{m+\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n-m$ )  $\dot{q}_h$  ( $h = 1, 2, \dots, n$ ) come coordinate cartesiane ortogonali in uno spazio  $S_{2n-m}$  a  $2n - m$  dimensioni e la funzione

$$H = T - U$$

del generico punto P di tale spazio.

<sup>1)</sup> J. ROUTH, *Die Dynamik der Systeme Starrer Körper*, P. II, Leipzig, Teubner, 1892, § 99. Avvertiamo di aver adottato notazioni differenti da quelle usate nel testo ora citato.

Il valore  $H_M$  di questa funzione nel punto M avente per coordinate i valori (2), è per la H un minimo effettivo, subordinatamente alle (3).

Difatti  $\bar{H}^*$  si ottiene da H sostituendo alle  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) le particolari espressioni per esse risultanti dalle (3) ed inoltre queste espressioni per  $q_{m+\alpha} = \bar{q}_{m+\alpha}$  si riducono proprio ai valori costanti  $\bar{q}_i$ .

Indicato con  $\delta$  un numero convenientemente piccolo, sarà

$$(4) \quad H_P > H_M$$

per ogni punto P di  $S_{2n-m}$  distinto da M, di coordinate verificanti le (3) e non esterno alla ipersfera  $\Sigma_\delta$  di centro M e raggio  $\delta$ .

Notiamo ora che i valori assunti dalla funzione

$$F = (H - H_M)^2 + \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \bar{c}_i \right)^2$$

nei punti Q giacenti su di una ipersfera  $\Sigma_\mu$  di centro M ed avente un raggio  $\mu$  qualsiasi minore di  $\delta$ , sono tutti positivi.

Infatti per essere la F nulla in uno di questi punti dovrebbero ivi essere simultaneamente nulle le quantità positive

$$(H - H_M)^2, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \bar{c}_i \right)^2 \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

ma ciò non può verificarsi perchè ove si annullano tutti i termini  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \bar{c}_i$  è valida la (4) e quindi non può annullarsi  $H - H_M$ .

Dalla circostanza ora rilevata segue che il minimo che la F, in virtù della sua continuità, ammette al variare di Q su  $\Sigma_\mu$ , è un numero maggiore di zero.

Essendo poi  $F_M = 0$ , comunque si prenda un numero positivo  $\epsilon' < \epsilon$ , esiste certamente, per la continuità di F, una ipersfera  $\Sigma_\eta$  di centro M e raggio  $\eta$  abbastanza piccolo perchè in ogni punto non esterno a  $\Sigma_\eta$  si abbia

$$F \leq \epsilon'.$$

Consideriamo infine un generico moto per il quale il sistema dei valori iniziali delle  $q_{m+\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n-m$ ),  $\dot{q}_h$  ( $h = 1, 2, \dots, n$ ) sia rappresentato in  $S_{2n-m}$  da un qualsiasi punto  $P_0$  non esterno a  $\Sigma_\eta$ . Poichè sia



H per la validità dell'integrale delle forze vive, che le funzioni  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$  in virtù delle (1), si mantengono costanti durante tutto il moto, la F conserverà costantemente il suo valore iniziale non superiore a  $\epsilon'$ . Pertanto il sistema dei valori delle  $q_{m+\alpha}, \dot{q}_h$  in ogni istante viene rappresentato da un punto P che non può mai raggiungere la ipersfera  $\Sigma_\mu$  (e quindi mai uscirne) giacchè allora risulterebbe

$$F \geq \epsilon > \epsilon'.$$

Risulta così provato che le quantità

$$\left| q_{m+\alpha} - \bar{q}_{m+\alpha} \right|, \left| \dot{q}_i - \bar{\dot{q}}_i \right|, \left| \dot{q}_{m+\alpha} \right| \quad (i = 1, 2, \dots, m; \alpha = 1, 2, \dots, n - m)$$

si conservano durante tutto il moto piccole quanto si vuole, purchè i valori iniziali delle  $q_{m+\alpha}, \dot{q}_h$  soddisfino alla *sola* condizione di essere abbastanza prossimi ai valori (2).

Cioè il nostro teorema rimane completamente dimostrato.

STUDIO DI UNA TRASFORMAZIONE BIRAZIONALE DELL'  $S_5$  COMPLESSO  
DETERMINATA DA UNA TRASFORMAZIONE QUADRATICA BIDUALE

*Nota del dott. Pio Balsimelli, presentata dal socio N. Spampinato*

(Adunanza del dì 5 dicembre 1953)

**Sunto.** — Si introduce la trasformazione birazionale dedotta da una trasformazione quadratica biduale, si determinano e si caratterizzano i sistemi lineari di ipersuperficie ad essa legati, gli enti omologhi degli spazi fondamentali nel campo biduale ed i corrispondenti nello  $S_5$  complesso.

*Generalità.*

Consideriamo la trasformazione quadratica biduale di equazioni:

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma'_1 = \gamma_2^2 \\ \gamma'_2 = \gamma_1 \gamma_3 \\ \gamma'_3 = \gamma_2 \gamma_3 \end{array} \right.$$

determinata da una rete omaloidica di coniche biduali passanti per i punti  $U_1 (u, 0, 0)$  ed  $U_3 (0, 0, u)$  del piano biduale ed aventi per tangente in  $U_1$  la retta biduale  $U_1 U_2$ .

Posto al solito:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= x_i u + y_i \varepsilon \\ \gamma'_i &= x'_i u + y'_i \varepsilon \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, 3)$$

sostituendo ed eseguendo i calcoli, tenendo conto della tabella di moltiplicazione, si perviene alla trasformazione quadratica dell'  $S_5$  (ambiente della congruenza immagine dei punti dell'  $S_2$  biduale):

$$[2] \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_2^2 \\ y'_1 = 2 x_2 y_2 \\ x'_2 = x_1 x_3 \\ y'_2 = x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ x'_3 = x_2 x_3 \\ y'_3 = x_2 y_3 + x_3 y_2 \end{array} \right.$$

Tale trasformazione è determinata dal sistema  $\infty^5$  di iperquadriche

dell'  $S_5$ :

$$[2'] \quad \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 x_2 y_2 + \lambda_3 x_1 x_3 + \lambda_4 (x_1 y_3 + x_3 y_1) + \lambda_5 x_2 x_3 + \lambda_6 (x_2 y_3 + x_3 y_2) = 0$$

che gode delle seguenti proprietà:

a) ammette come semplici i piani  $A_2 A_4 A_6$ ,  $A_1 A_2 A_4$ , le rette  $A_5 A_6$  ed  $A_1 A_2$ .

Diverso è però il comportamento della generica iperquadrica del sistema nei riguardi delle due rette perchè, mentre l'iperpiano tangente in un generico punto della  $A_5 A_6$  non presenta particolarità, quello tangente in un punto della  $A_1 A_2$  contiene per intero l' $S_3 \equiv A_1 A_2 A_3 A_4$  ( $S_3$  ambiente della congruenza immagine della retta biduale  $U_1 U_2$ ) anzi esiste una proiettività tra i punti della retta  $A_1 A_2$  e gli iperpiani tangenti corrispondenti della stella di vertice l' $S_3$  suddetto.

Osserviamo che gli elementi base determinati sono in relazione alle seguenti circostanze: il piano  $A_2 A_4 A_6$  è singolare per la congruenza di rette dell' $S_5$ , la retta  $A_5 A_6$  è l'immagine del punto biduale  $U_3$  (o, o, u) base per la trasformazione biduale assegnata, l' $S_3 \equiv A_1 A_2 A_3 A_4$  è l'ambiente della congruenza di rette immagini dei punti della retta biduale  $U_1 U_2$  tangente alle coniche della rete omaloidica in  $U_1$ .

Le formule inverse della trasformazione (2) sono:

$$[3] \quad \begin{cases} x_1 = 2 x_1'^2 x_2' x_3' \\ y_1 = 2 x_1'^2 x_3' y_2' - 2 x_1'^2 x_2' y_3' + x_1' x_2' x_3' y_1' \\ x_2 = 2 x_1'^2 x_3'^2 \\ y_2 = x_1' x_3'^2 y_1' \\ x_3 = 2 x_1' x_3'^3 \\ y_3 = 2 x_1' x_3'^2 y_3' - x_3'^3 y_1' \end{cases}$$

e rappresentano una trasformazione cremoniana del 4° ordine determinata dal sistema  $\infty^5$  di iperquartiche di equazione:

$$[3'] \quad 2\lambda_1 x_1'^2 x_2' x_3' + 2\lambda_2 x_1'^2 x_3'^2 + 2\lambda_3 x_1' x_3'^3 + \lambda_4 (2 x_1'^2 x_2' y_2' - 2 x_1'^2 x_2' y_3' + x_1' x_2' x_3' y_1') + \lambda_5 x_1' x_3'^2 y_1' + \lambda_6 (2 x_1' x_3'^2 y_3' - x_3'^3 y_1') = 0.$$

Tale sistema ammette come tripli la retta  $A_3 A_4$  ed il piano  $A_2 A_4 A_6$ , come doppi il piano  $A_1 A_2 A_4$  e l' $S_3 \equiv A_2 A_3 A_4 A_6$ , come semplici l' $S_3 \equiv A_3 A_4 A_5 A_6$ , l' $S_3 \equiv A_1 A_2 A_4 A_6$  e l' $S_3 \equiv A_1 A_2 A_3 A_4$ . Inoltre l'iperpiano tangente in un generico punto della retta  $A_3 A_4$  è fisso e contiene sempre l' $S_3 \equiv A_3 A_4 A_5 A_6$ , l'iperpiano tangente in un generico punto della retta  $A_1 A_2$  è l'iperpiano  $A_1 A_2 A_4 A_5 A_6$ , ed infine l'iperpiano tangente in un

generico punto della retta  $A_4 A_5$  è l'iperpiano di equazione:

$$2 \lambda_3 x_1 - \lambda_6 y_1 = 0$$

*Punti fondamentali della trasformazione quadratica biduale considerata.*

Sono fondamentali, come sappiamo in generale, i punti base della rete omaloidica di coniche biduali considerata e cioè il punto  $U_1 (u, 0, 0)$ , il punto  $H$  infinitamente vicino ad  $U_1$  nella direzione  $U_1 U_2$  ed il punto  $U_3 (0, 0, u)$ .

*Omologhi dei punti fondamentali.*

Per determinare gli omologhi di  $U_3$  basta considerare una retta per  $U_3$  di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \rho \bar{\gamma}_1 \\ \gamma_2 = \rho \bar{\gamma}_2 \\ \gamma_3 = u \end{cases}$$

L'omologo del punto corrente di essa è per (1), dove aver diviso per  $\rho$ :

$$\begin{cases} \gamma'_1 = \rho \bar{\gamma}_2 \\ \gamma'_2 = u \bar{\gamma}_1 \\ \gamma'_3 = u \bar{\gamma}_2 \end{cases}$$

e facendo tendere  $\rho$  a zero tale punto tende al punto di coordinate  $P' (0, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2)$  che descrive al variare di  $\bar{\gamma}_1$ , e  $\bar{\gamma}_2$  la retta  $U_2 U_3$  che è quindi l'omologa di  $U_3$ . Procedendo in modo analogo si vede che tutti i punti infinitamente vicini ad  $U_1$  hanno un unico omologo e cioè il punto  $U_2$ , ad eccezione del punto  $H$  infinitamente vicino ad  $U_1$  nella direzione  $U_1 U_2$  che è a sua volta fondamentale.

Per determinare gli omologhi di  $H$  conviene considerare un fascio di coniche biduali passanti per  $U_1$  ed aventi in  $U_1$  per tangente la retta  $U_1 U_2$ , fascio di equazione:

$$\gamma_2^2 = \lambda \gamma_3 (\gamma_1 - \gamma_3)$$

Le equazioni parametriche di una tale conica sono ( $\rho$  parametro):

$$\begin{cases} \gamma_1 = \lambda + \rho^2 \\ \gamma_2 = \lambda \rho \\ \gamma_3 = \rho^2 \end{cases}$$



Applicando le [1] e dopo aver aver diviso per  $\rho^2$ , si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma'_1 = \lambda^2 \\ \gamma'_2 = \lambda + \rho^2 \\ \gamma'_3 = \lambda \rho \end{array} \right.$$

e facendo tendere  $\rho$  a zero si ha il punto di coordinate  $(\lambda, u, o)$ , che, al variare della conica nel fascio, cioè di  $\lambda$ , descrive la retta  $U_1 U_2$ ; pertanto ad H corrisponde la retta  $U_1 U_2$ .

*Modo di ricavare le rette della congruenza  
immagini degli omologhi dei punti fondamentali.*

Vediamo come si possono ottenere le rette della congruenza immagini degli omologhi dei punti fondamentali servendosi della [2].

Si consideri il punto biduale P corrente della retta  $U_3 \bar{P}$  con  $\bar{P}(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, 0)$  che è rappresentato dalla matrice:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 0 & \rho_1 \bar{x}_1 & 0 & \rho_1 \bar{x}_2 & 0 & 1 \\ \rho_1 \bar{x}_1 & \rho_1 \bar{y}_1 + \rho_2 \bar{x}_1 & \rho_1 \bar{x}_2 & \rho_1 \bar{y}_2 + \rho_2 \bar{x}_2 & 1 & 0 \end{array} \right\|$$

e quindi è rappresentato dalla retta di equazioni parametriche:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \lambda \rho_1 \bar{x}_1 \\ y_1 = \rho_1 \bar{x}_1 + \lambda (\rho_1 \bar{y}_1 + \rho_2 \bar{x}_1) \\ x_2 = \lambda \rho_1 \bar{x}_2 \\ y_2 = \rho_1 \bar{x}_2 + \lambda (\rho_1 \bar{y}_2 + \rho_2 \bar{x}_2) \\ x_3 = \lambda \\ y_3 = 1 \end{array} \right.$$

Tale retta per le [2] si trasforma nell'altra;

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = \lambda \rho_1^2 \bar{x}_1^2 \\ y'_1 = 2 \rho_1 \bar{x}_2 [\rho_1 \bar{x}_2 + \lambda (\rho_1 \bar{x}_2 + \rho_2 \bar{x}_2)] \\ x'_2 = \lambda \rho_1 \bar{x}_1 \\ y'_2 = 2 \rho_1 \bar{x}_1 + \lambda (\rho_1 \bar{y}_1 + \rho_2 \bar{x}_1) \\ x'_3 = \lambda \rho_1 \bar{x}_2 \\ y'_3 = 2 \rho_1 \bar{x}_2 + \lambda (\rho_1 \bar{x}_2 + \rho_2 \bar{x}_2) \end{array} \right.$$

Facendo tendere  $\rho_2$  a zero e dividendo poi per  $\rho_1$  si ha :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = \lambda \rho_1 \bar{x}_2^2 \\ y'_1 = 2 \rho_1 \bar{x}_2 (\bar{x}_2 + \lambda \bar{y}_2) \\ x'_2 = \lambda \bar{x}_1 \\ y'_2 = 2 \bar{x}_1 + \lambda \bar{y}_1 \\ x'_3 = \lambda \bar{x}_2 \\ y'_3 = 2 \bar{x}_2 + \lambda \bar{y}_2 \end{array} \right.$$

Facendo ora tendere  $\rho_1$  a zero si ha infine :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = 0 \\ y'_1 = 0 \\ x'_2 = \lambda \bar{x}_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y'_2 = 2 \bar{x}_1 + \lambda \bar{y}_1 \\ x'_3 = \lambda \bar{x}_2 \\ y'_3 = 2 \bar{x}_2 + \lambda \bar{y}_2 \end{array} \right.$$

Queste sono precisamente le equazioni della retta della congruenza immagine di  $\bar{P}'$  omologo di  $U_3$  nella direzione  $U_3 \bar{P}$ .

Consideriamo ora il punto corrente di una delle coniche del fascio prima considerato. Esso è rappresentato dalla retta della congruenza di equazioni parametriche (parametro  $h$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \rho_1^2 + \lambda_1 \\ y_1 = h (\rho_1^2 + \lambda_1) + 2\rho_1 \rho_2 + \lambda_2 \\ x_2 = \rho_1 \lambda_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y_3 = h \rho_1 \lambda_1 + \lambda_1 \rho_2 + \lambda_2 \rho_1 \\ x_3 = \rho_1^2 \\ y_3 = h \rho_1^2 + 2\rho_1 \rho_2 \end{array} \right.$$

Tale retta è trasformata dalla [2] nell'altra di equazioni parametriche :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = \rho_1^2 \lambda_1^2 \\ y'_1 = 2 \rho_1 \lambda_1 (h \rho_1 \lambda_1 + \lambda_1 \rho_2 + \lambda_2 \rho_1) \\ x'_2 = \rho_1^2 (\rho_1^2 + \lambda_1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_2 = (\rho_1^2 + \lambda) (h \rho_1 + 2 \rho_2) \rho_1 + \rho_1^3 [h (\rho_1^2 + \lambda_1) + 2 \rho_1 \rho_2 + \lambda_2] \\ x'_3 = \rho_1^3 \lambda_1 \\ y'_3 = \rho_1 \lambda_1 (h \rho_1^2 + 2 \rho_1 \rho_2) + \rho_1^2 (h \rho_1 \lambda_1 + \lambda_1 \rho_2 + \lambda_2 \rho_1) \end{array} \right.$$

Dividendo per  $\rho_1$  e facendo poi tendere  $\rho_2$  a zero si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = \rho_1 \lambda_1^2 \\ y'_1 = 2\lambda_1 (h \rho_1 \lambda_1 + \lambda_2 \rho_1) \\ x'_2 = \rho_1 (\rho_1^2 + \lambda_1) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y'_2 = (\rho_1^2 + \lambda_1) h \rho_1 + \rho_1 [h (\rho_1^2 + \lambda_1) + \lambda_2] \\ x'_3 = \rho_1^2 \lambda_1 \\ y'_3 = \lambda_1 h \rho_1^2 + \rho_1 (h \rho_1 \lambda_1 + \lambda_2 \rho_1) \end{array} \right.$$

Dividendo ancora per  $\rho_1$  e facendo tendere  $\rho_1$  a zero si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = \lambda_1^2 \\ y'_1 = 2\lambda_1 (h \lambda_1 + \lambda_2) \\ x'_2 = \lambda_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y'_2 = 2 h \lambda_1 + \lambda_2 \\ x'_3 = 0 \\ y'_3 = 0 \end{array} \right.$$

che rappresenta precisamente la retta della congruenza congiungente i due punti  $(0, \lambda_1^2, 0, \lambda_1, 0, 0)$  e  $(\lambda_1^2, 2 \lambda_1 \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, 0, 0)$  immagine del punto biduale di coordinate  $(\lambda^2, \lambda, 0)$  cioè  $(\lambda, u, 0)$ , che al variare del parametro  $\lambda$  descrive la  $U_1 U_2$  omologa di  $H$ .

IL PRINCIPIO DI EQUIVALENZA NELLE STRUTTURE MONODIMENSIONALI  
SOGGETTE A DISTORSIONI CONCENTRATE

*Nota del prof. Vincenzo Franciosi, presentata dal socio Adriano Galli*

(Adunanza del dì 7 novembre 1953)

**Sunto.** — Si definiscono le tre caratteristiche di una distorsione concentrata in una struttura modimensionale piana. Si dimostra che gli effetti statici di una distorsione concentrata dipendono, negli stessi limiti del postulato di DE SAINT-VÉNANT, soltanto dalle caratteristiche della distorsione e non dall'effettiva distribuzione degli spostamenti relativi sulla sezione.

1) *Le caratteristiche di una distorsione concentrata.*

Si dice che un corpo elastico è soggetto ad una distorsione quando in esso, per qualsiasi causa, sorgono delle componenti speciali di deformazione  $\bar{\epsilon}$  e  $\bar{\gamma}$  che non rispettano le equazioni di congruenza, oppure tali che, pur soddisfacendo queste ultime, dipendono da spostamenti  $\bar{u}$   $\bar{v}$   $\bar{w}$  incompatibili con le condizioni di vincolo.

Accanto alle  $\bar{\epsilon}$  e  $\bar{\gamma}$  si destano le  $\epsilon$  e  $\gamma$ , componenti della deformazione elastica tale che le  $\epsilon + \bar{\epsilon}$  e  $\gamma + \bar{\gamma}$ , e le  $u + \bar{u}$ ,  $v + \bar{v}$ ,  $w + \bar{w}$ , rispettano sia le condizioni di congruenza che quelle di vincolo. Le tensioni  $\sigma$  e  $\tau$  che si accompagnano alle  $\epsilon$  e  $\gamma$  costituiscono lo stato di coazione dipendente dalla distorsione. Il complesso delle  $\sigma$  e  $\tau$  è in equilibrio con forze esterne applicate nulle; esso può dunque essere accompagnato soltanto da un sistema di reazioni esterne tra loro in equilibrio.

In una struttura monodimensionale si può provocare una distorsione concentrata, in una sezione trasversale S (fig. 1a), come segue. Eseguito un taglio in corrispondenza della S, si applicano sulle due facce A' ed A'', risultanti dal taglio, due sistemi  $\Sigma$  e  $-\Sigma$  di forze elementari, agenti tutte in piani paralleli a quello dell'asse della struttura, e costanti lungo ogni corda parallela all'asse x (fig. 1b), le cui componenti normale e tangenziale siano  $n(y)$  e  $t(y)$ . Le forze elementari agenti in due punti P' e P'' corrispondenti (cioè tali da coincidere prima dell'applicazione delle forze  $\Sigma$  e  $-\Sigma$ ) siano eguali e contrarie.



I sistemi  $\Sigma$  e  $-\Sigma$  provocano spostamenti relativi fra i punti corrispondenti delle sezioni  $A'$  e  $A''$ , di componenti  $v$  e  $w$  secondo gli assi  $y$  e

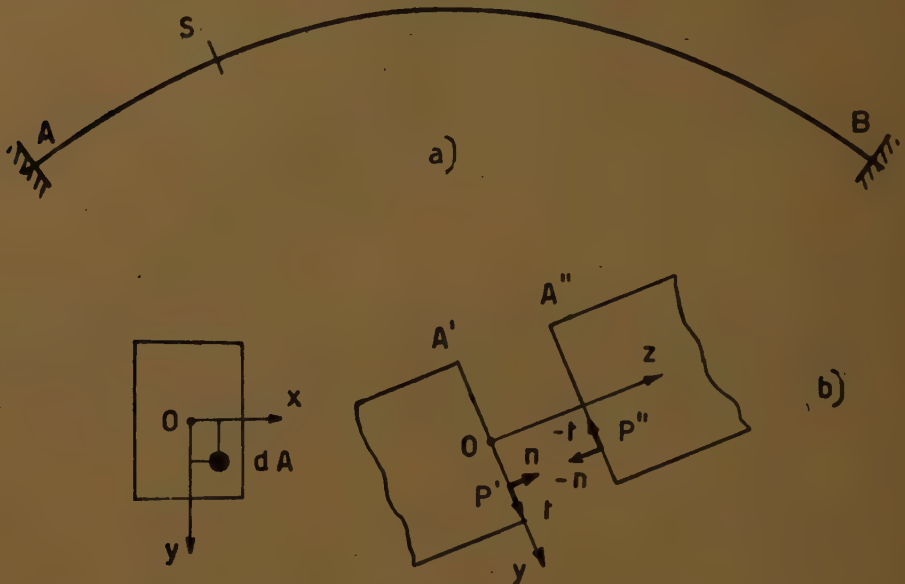


Fig. 1.

$z$ . Definiamo rispettivamente caratteristiche della distorsione lo « scorrimento relativo medio »

$$(1) \quad \Delta v = \frac{1}{A} \int_A f(x, y) v \, dA$$

lo « spostamento assiale relativo medio »

$$(2) \quad \Delta w = \frac{1}{A} \int_A w \, dA$$

e la « rotazione relativa media »

$$(3) \quad \Delta \alpha = \frac{1}{I} \int_A w y \, dA$$

Il essendo il momento d'inerzia della sezione  $A$  rispetto all'asse baricentrico  $x$ . La  $f(xy)$  è la funzione che caratterizza la distribuzione alla DE SAINT-VÉNANT delle tensioni tangenziali  $\tau_{xy}$  provocate da una forza tangente  $T$  diretta secondo  $y$

$$\tau_{xy} = \frac{T}{A} f(x, y).$$

Le  $w$  sono positive se, supposto  $P''$  fisso,  $P'$  si sposta nel verso positivo dell'asse  $z$ ; le  $v$  se  $P'$  si sposta nel verso positivo dell'asse  $y$ . Si osserva quindi che i segni di  $\Delta w$ ,  $\Delta v$  e  $\Delta \alpha$  corrispondono alla convenzione che generalmente si segue nel caso delle distorsioni tra facce piane.

Si noti che il lavoro compiuto da una distribuzione lineare di tensioni  $\sigma_z$ , di risultanti  $N$  ed  $M$ , e di una distribuzione alla DE SAINT-VÉNANT di tensioni  $\tau_{yz}$ , di risultante  $T$ , per effetto degli spostamenti  $v$  e  $w$ , è fornito da

$$L = \int_A \sigma_z w dA + \int_A \tau_{yz} v dA = \frac{N}{A} \int_A w dA + \frac{M}{I} \int_A wy dA + \frac{T}{A} \int_A f(x, y) v dA = N \Delta w + M \Delta \alpha + T \Delta v.$$

Le  $\Delta w$ ,  $\Delta v$  e  $\Delta \alpha$  sono quindi quelle grandezze per cui debbono essere moltiplicate le risultanti  $N$ ,  $T$ ,  $M$  di una distribuzione su  $S$  di sforzi elementari alla DE SAINT-VÉNANT, per ottenere il lavoro compiuto da questi sforzi per effetto della distorsione caratterizzata dalle componenti  $v(y)$  e  $w(y)$ .

## 2) Il principio di equivalenza fra due distorsioni concentrate.

Si vuole dimostrare che, se due distorsioni concentrate applicate in  $S$  hanno le stesse caratteristiche  $\Delta v$ ,  $\Delta w$  e  $\Delta \alpha$ , i loro effetti statici sulla struttura sono identici.

Si consideri perciò la struttura soggetta in  $S$  ad una distorsione caratterizzata dagli spostamenti  $v'(y)$  e  $w'(y)$  (fig. 2a), e la stessa struttura soggetta in  $S$  ad una distorsione caratterizzata dagli spostamenti  $v''(y)$  e  $w''(y)$  (fig. 2b). La prima distorsione può pensarsi provocata, alla maniera anzidetta, da due sistemi  $\Sigma'$  e  $-\Sigma'$  di forze elementari  $n'(y)$  e  $t'(y)$ , la seconda da due sistemi  $\Sigma''$  e  $-\Sigma''$ .

Si consideri poi la stessa struttura in cui la distorsione sia ottenuta facendo agire in  $S$  due sistemi  $\Sigma$  e  $-\Sigma$  di forze elementari  $n(y)$  e  $t(y)$  distribuite alla DE SAINT-VÉNANT (fig. 2c). In quest'ultimo caso la distorsione è caratterizzata dagli spostamenti

$$(4) \quad \begin{aligned} w &= \Delta w + \Delta \alpha \cdot y + w_1 \\ v &= \Delta v \end{aligned}$$

dove  $w_1$  rappresenta l'ingobbimento dovuto al taglio. La  $v$  è costante su

tutta la sezione, come risulta dalla trattazione esatta del problema del taglio; la  $w$  dovuta all'effetto dello sforzo normale e del momento flettente varia linearmente lungo  $y$ .

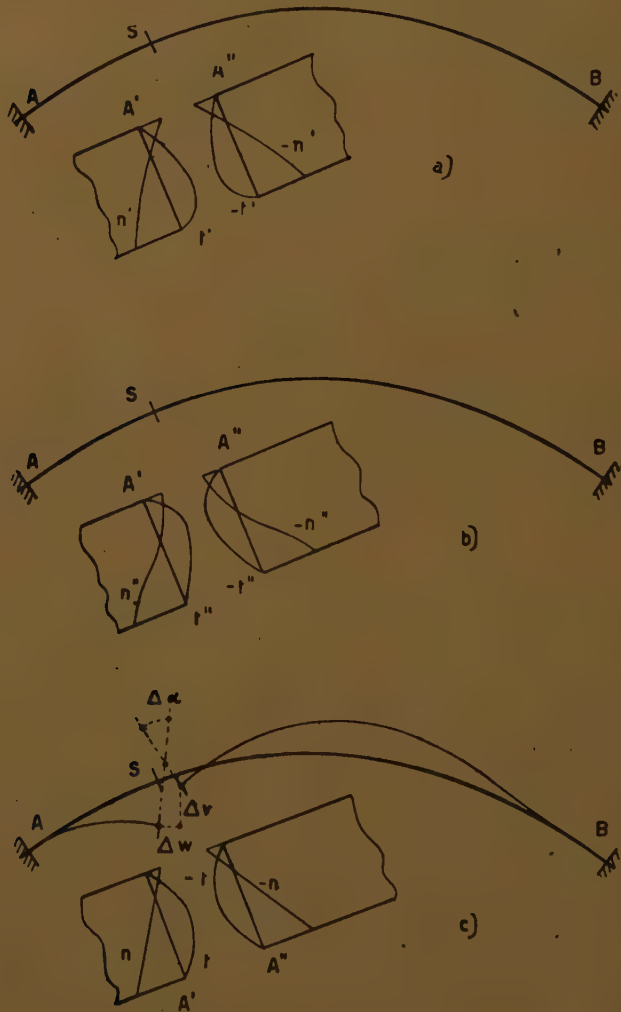


Fig. 2.

Il teorema di BETTI, applicato ai due sistemi di forze e spostamenti delle fig 2a e 2c, e successivamente a quelli delle fig. 2b e 2c, fornisce

$$(5) \quad \begin{aligned} \int_A n' w \, dA + \int_A t' v \, dA &= \int_A n w' \, dA + \int_A t v' \, dA \\ \int_A n'' w \, dA + \int_A t'' v \, dA &= \int_A n w'' \, dA + \int_A t v'' \, dA. \end{aligned}$$

Poichè è

$$\int_A n w' dA + \int_A t v' dA = \frac{N}{A} \int_A w' dA + \frac{M}{I} \int_A w' y dA + \\ + \frac{T}{A} \int_A f(x, y) v' dA = N \Delta' w + M \Delta' \alpha + T \Delta' v$$

$$\int_A n w'' dA + \int_A t v'' dA = \frac{N}{A} \int_A w'' dA + \frac{M}{I} \int_A w'' y dA + \\ + \frac{T}{A} \int_A f(x, y) v'' dA = N \Delta'' w + M \Delta'' \alpha + T \Delta'' v,$$

ed essendo per ipotesi

$$\Delta' w = \Delta'' w; \quad \Delta' \alpha = \Delta'' \alpha; \quad \Delta' v = \Delta'' v$$

si trae che i secondi membri delle eguaglianze (5) sono uguali. Si può quindi scrivere

$$(6) \quad \int_A n' w dA + \int_A t' v dA = \int_A n'' w dA + \int_A t'' v dA.$$

Per le (4), la (6) si scrive

$$(7) \quad \Delta w \int_A n' dA + \Delta \alpha \int_A n' y dA + \int_A n' w_t dA + \Delta v \int_A t' dA = \\ = \Delta w \int_A n'' dA + \Delta \alpha \int_A n'' y dA + \int_A n'' w_t dA + \Delta v \int_A t'' dA.$$

Trascurando i termini  $w_t$  in rapporto ai tre termini  $\Delta w$ ,  $\Delta \alpha$  e  $\Delta v$ , poichè la (7) vale per qualunque valore si assegni a queste tre quantità, si traggono le eguaglianze

$$(8) \quad \int_A n' dA = \int_A n'' dA; \quad \int_A n' y d\alpha = \int_A n'' y d\alpha; \quad \int_A t' dA = \int_A t'' dA.$$

Le (8) esprimono l'eguaglianza delle caratteristiche dei due sistemi distorcenti  $\Sigma' - \Sigma'$  e  $\Sigma'' - \Sigma''$ . Per il postulato di DE SAINT-VÉNANT si può quindi asserire che sono anche uguali gli effetti statici che essi, e quindi le distorsioni corrispondenti, producono in tutti i punti della struttura posti ad una certa distanza dalla sezione S di applicazione.



NOZIONI INTRODUTTIVE ALLA TEORIA DELLE IPERSUPERFICIE ALGEBRICHE  
DI INDICE  $n$  DELL' $S_r$  PROIETTIVO COMPLESSO

*Nota XI del socio ordinario Nicolò Spampinato*

(Adunanza del dì 5 dicembre 1953)

**Sunto.** — In questa nota facendo seguito alle precedenti <sup>1)</sup> si introduce la determinazione birazionale involuppo di una varietà algebrica; l' $S_r^*$  birazionale generale e l' $\overline{S}_r$  birazionale involuppo determinato dall' $S_r$  proiettivo complesso ed il loro comportamento rispetto al gruppo delle trasformazioni cremoniane di  $S_r$ .

59. DETERMINAZIONE BIRAZIONALE LUOGO ED INVILUPPO DI UNA  $V_k$

Nel n° 51 abbiamo assegnato la determinazione birazionale di un'ordinaria varietà algebrica  $V_k$  dell' $S_r$  complesso con l'insieme  $V_k(O_h, \rho_k)$  delle coppie *origine-falda k-dimensionali*, appartenenti alla  $V_k$ , e quindi  $O_h$  elemento di  $V_k$ , cioè un punto  $O_0$  o il sostegno di una varietà unirazionale  $V_h$  di  $V_k$ , e  $\rho_k$  falda di dimensione  $k$  di  $V_k$  di origine  $O_h$ . Tale determinazione birazionale si dirà *luogo*, per distinguerla da un'altra, che si dirà *determinazione birazionale involuppo* che ora introdurremo, pure di pertinenza della Geometria birazionale della  $V_k$ .

In corrispondenza ad una fissata falda di dimensione massima  $\rho_k$  della  $V_k$ , di origine  $O_h$ , si considerino tutte le falde  $k$ -dimensionali, unirazionali, le cui equazioni sono ottenibili da quelle di  $\rho_k$  trascurando, nelle serie di potenze a secondo membro, tutti i termini da un grado  $m$  in poi, e quindi con  $m >$  dell'esponente all'origine della falda. Tali falde avranno tutte per origine l'origine  $O_h$  della falda  $\rho_k$ . Ognuna di essa è falda di una varietà unirazionale, a  $k$  dimensioni, costituente una *ridotta* della falda algebrica  $\rho_k$  di  $V_k$  considerata. Se dette serie non sono tutte con un numero finito di termini (ciò che può avvenire solo se la  $V_h$  è unirazionale) in corrispondenza alle infinite ridotte  $k$ -dimensionali della falda  $\rho_k$ , avremo infinite falde unirazionali (in quanto appartenenti a varietà unirazionali

---

<sup>1)</sup> SPAMPINATO N. *Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice  $n$  dell' $S_r$  proiettivo complesso*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat. di Napoli. Vol. XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX, (1946, ..., 1952). In tali note sono contenuti i n° da 1 a 58. Pertanto la presente nota si inizia col n° 59.

della stessa dimensione  $k$ ) tutte con l'origine  $O_h$  ed aventi in ogni punto di  $O_h$  tutto lo stesso  $S_k$  tangente, (che sarà pure tangente alla  $V_k$  in tale punto, potendosi considerare la falda  $\rho_k$  di  $V_k$ , come limite della successione delle infinite ridotte sudette).

Se indichiamo con  $\bar{V}_k (O_h, \bar{\rho}_k)$  l'insieme delle coppie origine-falda  $k$ -dimensionale con  $O_h$  elemento di  $V_k$ , e  $\bar{\rho}_k$  una di dette falde unirazionali provenienti dalle ridotte di ogni falda  $\rho_k$  di  $V_k$ , di origine  $O_h$ , elemento fissato comunque nel sostegno birazionale  $E_k$  di  $V_k$ , diremo che tale insieme ci dà la *determinazione birazionale involuppo* della  $V_k$ .

#### 60. DEFINIZIONE DI $\bar{S}_r$ BIRAZIONALE INVILUPPO.

Nel caso che la varietà  $V_k$  considerata nel n° precedente sia un  $S_r$  proiettivo (complesso) avremo, in corrispondenza, di tale  $S_r$  la *determinazione birazionale involuppo*  $\bar{S}_r (O_h, \bar{\rho}_r)$  costituita dall'insieme delle coppie origine-falda  $r$ -dimensionale, unirazionale di  $S_r$ . Tale insieme lo diremo  $\bar{S}_r$  *birazionale involuppo* determinato dal dato  $S_r$  proiettivo.

Nel n° seguente vedremo che detto  $\bar{S}_r$  birazionale involuppo, insieme al sostegno birazionale  $E_r$  di  $S_r$ , fa parte di un altro ente, pure determinato da  $S_r$ , che indicheremo con  $S_r^*$  e lo chiameremo  $S_r^*$  *birazionale generale*.

#### 61. DEFINIZIONE DI $S_r^*$ BIRAZIONALE GENERALE:

L' $S_r$  *numerico* proiettivo complesso è definito, com'è noto, come l'insieme delle  $(r+1)$ ple ordinate di numeri complessi non tutti nulli e definiti a meno di un fattore non nullo. Come estensione di detta definizione chiamiamo  $S_r^*$  *numerico birazionale generale* complesso l'insieme delle  $(r+1)$ ple ordinate di forme

$$(1) \quad (f_1 (\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1}), \dots, f_{r+1} (\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1}))$$

nelle  $r+1$  variabili complesse  $\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1}$ , non tutte identicamente nulle, dello stesso grado, e definite a meno di una forma fattore  $f (\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1})$ , non identicamente nulla.

Un qualunque insieme di enti geometrici si dirà che costituisce un  $S_r$  *birazionale generale*, complesso, se può mettersi in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con l' $S_r^*$  *numerico birazionale generale* complesso. In tal caso gli enti di tale insieme si diranno i punti di detto  $S_r^*$  *birazio-*

nale generale. Se ad un tale punto  $P^*$  risponde la  $(r+1)$ pla (1), le forme  $f_1(\lambda_j), \dots, f_{r+1}(\lambda_j)$  si diranno le *coordinate* di  $P^*$  e si porrà  $P^*(f_1, \dots, f_{r+1})$ .

Nel caso particolare che le  $r+1$  forme  $f_j(\lambda_s)$  sono ottenibili moltiplicando una forma  $f(\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1})$  non identicamente nulla con  $r+1$  numeri complessi  $x_1, \dots, x_{r+1}$ , non tutti nulli, i corrispondenti punti di  $S_r^*$  sono in corrispondenza con l' $S_r$  numerico proiettivo e quindi si ha che:

I) Ogni  $S_r^*$  birazionale generale contiene un  $S_r$  proiettivo.

Nel caso particolare, ma più generale del precedente, che le forme (1), dipendono, non da tutte le  $r+1$  variabili  $\lambda_s$ , ma al più da  $r$  di esse, il punto dell' $S_r^*$  birazionale di coordinate (1), viene a determinare nell' $S_r$  proiettivo l'elemento  $O_h$ , con  $0 \leq h \leq r-1$ , costituito dal sostegno della  $V_h$ , unirazionale, di equazioni parametriche

$$(2) \quad x_1 = f_1(\lambda_s), \dots, x_{r+1} = f_{r+1}(\lambda_s),$$

elemento che per  $h=0$  si riduce ad un punto dell' $S_r$  proiettivo. Sicchè, assimilando in tal caso il punto  $P^*$  dell' $S_r^*$  birazionale generale di coordinate (1), con detto elemento  $O_h$  di  $S_r$  da esso determinato, si ha:

II)  $L'S_r$  birazionale generale contiene l'insieme  $E_r$  degli elementi dell' $S_r$  proiettivo contenuto in esso.

Si osservi che tale insieme  $E_r$  degli elementi di  $S_r$  costituisce il *sostegno birazionale* dell' $S_r$  proiettivo (caso particolare della definizione di sostegno birazionale di una varietà algebrica  $V_k$  dell' $S_r$  proiettivo, definito come l'insieme degli elementi di detta varietà, estendendo una definizione già assegnata nel caso  $k=1$ ).

Nel caso generale in cui le  $r+1$  forme (1) dipendono da tutte le  $\lambda_s$ , nè si possono esprimere come funzioni razionali intere di un numero inferiore di variabili, *posto in esse*  $\lambda_{r+1} = 1$ , viene ad essere determinata dal punto  $P^*$  di coordinate (1) una falda unirazionale  $\bar{\rho}_r$ , di dimensione  $r$ : quella di equazioni parametriche:

$$(3) \quad x_1 = f_1(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 1), \dots, x_{r+1} = f_{r+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 1)$$

Sicchè, assimilando in tal caso generale il punto  $P^*$  di coordinate (1) dell' $S_r^*$  birazionale generale con detta falda  $\bar{\rho}_r$ , si ha che:

III)  $L'S_r^*$  birazionale generale contiene tutte le falde  $\bar{\rho}_r$ ,  $r$ -dimensionali ed unirazionali, dell' $S_r$  proiettivo contenuto in esso.

Indicando con  $O_h$  l'origine di detta falda  $\bar{\rho}_r$  a cui è stato assimilato il punto  $P^*$  nel caso generale, a questo punto si può assimilare anche la coppia origine-falda ( $O_h \bar{\rho}_r$ ), e la proposizione III) si può mettere sotto la forma:





nulla. Tali forme  $g_j(\lambda_s)$ , per  $P^*$  punto generico di  $S_r^*$ , risulteranno non tutte identicamente nulle, come le forme  $f_j(\lambda)$ . Esse saranno, pertanto le coordinate di un punto  $Q^*$  dell'  $S_r^*$  birazionale generale, punto che si dirà il corrispondente del punto  $P^*$  nella *trasformazione birazionale* che la data trasformazione cremoniana  $C$  di  $S_r$  *subordina* nell'  $S_r^*$  birazionale generale.

Tenendo conto ora della relazione fondamentale (4) vediamo qual'è il comportamento della trasformazione  $C$  rispetto ad  $E_r$  e rispetto ad  $\bar{S}_r$ . Se  $P^*$  appartiene ad  $E_r$ , cioè è un elemento  $O_h$  di  $S_r$ , le  $r+1$  forme sue coordinate  $f_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1})$  non devono dipendere da tutte le  $r+1$  variabili  $\lambda_s$ , ma al più di  $r$  di esse. Conseguentemente della stessa proprietà godranno le  $r+1$  forme  $g_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1})$  date dalle (6) per tali forme  $f_j(\lambda_s)$ , cioè il punto  $Q^*$ , corrispondente di  $P^*$ , *apparterrà anch'esso ad  $E_r$* . Si osservi, però esplicitamente che, in questo caso le forme  $g_j(\lambda_s)$  *per particolari punti  $P^*$  di  $E_r$*  possono risultare tutte identicamente nulle: ciò avviene quando e solo quando la varietà unirazionale  $V_h$  il cui sostegno  $O_h$  ci dà tale *punto  $P^*$  di  $E_r$*  (sostegno birazionale di  $S_r$ ) appartiene alla varietà base del sistema omaloidico di ipersuperficie di  $S_r$ , di equazione:

$$(7) \quad a_1 F_1(x_1, \dots, x_{r+1}) + \dots + a_{r+1} F_{r+1}(x_1, \dots, x_{r+1}) = 0.$$

In tal caso il punto  $P^*$  di  $E_r$ , cioè l' *elemento  $O_h$* , si dirà *fondamentale* per la trasformazione birazionale che la trasformazione cremoniana  $C$  *subordina* in  $E_r$ . I punti  $O_h$  della varietà base del sistema (7) sono certamente fra questi. Ma saranno pure fondamentali i sostegni  $O_h$  di tutte le varietà unirazionali (in particolare razionali) che la varietà base sudetta può eventualmente contenere.

Se invece il punto  $P^*$  è un punto  $\bar{P}$  di  $\bar{S}_r$ , cioè le forme  $f_j(\lambda_s)$  sono effettivamente dipendenti dalle  $r+1$  variabili  $\lambda_s$ , il punto  $\bar{P}$  è uno di quei *punti* in cui è stata assimilata una coppia origine-falda  $r$ -dimensionale, unirazionale,  $(O_h, \bar{\rho}_r)$ . Una tale falda  $\bar{\rho}_r$  sarà trasformata, dalla trasformazione cremoniana  $C$ , in una falda che sarà pure unirazionale e di dimensione  $r$ , dato che  $r$  è la dimensione dell'  $S_r$  ambiente. Se diciamo  $\bar{\rho}'_r$  tale falda trasformata di  $\bar{\rho}_r$ , e  $O'_h$ , l'origine di essa (che sarà il sostegno della varietà  $V'_h$ , trasformata della varietà  $V_h$  il cui sostegno ci dà  $O_h$ ) la coppia  $(O'_h, \bar{\rho}'_r)$  costituirà il *punto* corrispondente di  $\bar{P}$ , appartenente, quindi, ad  $\bar{S}_r$ . Si ha perciò che la  $C$  trasforma  $\bar{S}_r$  in sè stesso e vi subordina una corrispondenza biunivoca *senza eccezione*. Raccogliendo si ha:

*Il gruppo delle trasformazioni cremoniane dell'  $S_r$  proiettivo subordina un gruppo di trasformazioni birazionali nell'  $S_r^*$  birazionale generale, rispetto a cui sono uniti sia il sostegno  $E_r$  di  $S_r$ , sia l'  $S_r$   $(O_h, \bar{\rho}_r)$  birazionale*

*inviluppo, subordinando: in  $E_r$  una corrispondenza birazionale con elementi fondamentali; in  $\bar{S}_r$  una corrispondenza biunivoca senza eccezioni.*

NOTA. — Dall'ultima proprietà risulta che il gruppo (C) delle trasformazioni cremoniane  $S_r$ , applicato ad  $\bar{S}_r$ , si comporta come il gruppo delle trasformazioni proiettive non degeneri applicato ad  $S_r$ , inquantochè determina corrispondenze biunivoche *senza eccezioni*. Da ciò segue che [come il gruppo delle trasformazioni proiettive non degeneri si può interpretare come *gruppo di trasformazioni di coordinate proiettivo dell' $S_r$  proiettivo*, così] al gruppo delle trasformazioni birazionali nell' $\bar{S}_r$  birazionale inviluppo si può dare una seconda interpretazione: basta considerare le forme  $g_j(\lambda_s)$ , date dalle (6) con le  $(f_1, \dots, f_{r+1})$  coordinate di un punto  $\bar{P}$  di  $\bar{S}_r$ , come *coordinate dello stesso punto  $\bar{P}$  in un altro sistema di coordinate in  $\bar{S}_r$*  legato al primo dalle stesse relazioni (6), interpretate come le equazioni di una trasformazione di coordinate in  $\bar{S}_r$ .

### 63. DETERMINAZIONE BIRAZIONALE DI UNA IPERSUPERFICIE DELL' $\bar{S}_r$ BIRAZIONALE INVILUPPO.

Data nell' $S_r$  proiettivo una ipersuperficie ordinaria  $V_{r-1}$  di equazione

$$(8) \quad f(x_1, \dots, x_{r+1}) = 0,$$

indichiamo con  $B(O_h, \bar{\rho}_r)$  la molteplicità d'intersezione birazionale della  $V_{r-1}$  con la falda  $\bar{\rho}_r$  nella sua origine  $O_h$ , costituenti un punto  $\bar{P}$  dell' $\bar{S}_r$  ( $O_h, \bar{\rho}_r$ ) birazionale inviluppo. Variando  $\bar{P}$  in  $\bar{S}_r$ , resta definita una funzione numerica  $B(O_h, \bar{\rho}_r)$  determinata dalla data ipersuperficie  $V_{r-1}$  di  $S_r$ . Associando al sostegno  $E_{r-1}$  della  $V_{r-1}$ , detta funzione numerica si ottiene quell'ente che si dirà l'*ipersuperficie  $\bar{V}_{r-1}$  dell' $\bar{S}_r$  birazionale inviluppo* determinata dalla ipersuperficie  $V_{r-1}$  di  $S_r$ , e si porrà:

$$(9) \quad \bar{V}_{r-1} = [E_{r-1}, B(O_h, \bar{\rho}_r)].$$

Tale ente risulta, evidentemente, di pertinenza della *Geometria birazionale dell' $\bar{S}_r$  birazionale inviluppo* determinata dal gruppo delle trasformazioni birazionali subordinate in  $\bar{S}_r$  dal gruppo (C) delle trasformazioni cremoniane dell' $S_r$  proiettivo.

Si osservi che la relazione (9) risulta compresa nella relazione generale dimostrata nel n° 56. Invero questa relazione, per  $t=r$ , ci dà la relazione:

$$(10) \quad V_{r-1} = [E_{r-1}, B(O_h, \rho_r)]$$

e questa comprende la (9), perchè le falde unirazionali  $\bar{\rho}_r$  dell'  $S_r$  fanno parte dell'insieme di tutte le falde  $\rho_r$  di detto  $S_r$ .

Quanto è sopra detto, in relazione alla ipersuperficie *ordinaria*  $V_{r-1}$ , si può ripetere per una ipersuperficie virtuale, o ideale, o, in generale, di indice di algebricità  $n$  qualunque.

Avremo precisamente, in relazione alle ipersuperficie  $W_{r-1}$ , di indice di algebricità  $n$ , dell'  $S_r$  proiettivo, nella sua determinazione birazionale data da:

$$(10') \quad W_{r-1} = [E_{r-1}^{(0)} + E_{r-1}^{(n)}, B(O_h, \rho_r)],$$

la ipersuperficie  $\bar{W}_{r-1}$ , di indice di algebricità  $n$ , dell'  $\bar{S}_r$  birazionale involuppo, determinata dalla  $W_{r-1}$ , e data da:

$$(9') \quad \bar{W}_{r-1} = [E_{r-1}^{(0)} + E_{r-1}^{(n)}, B(O_h, \bar{\rho}_r)].$$

#### 64. DETERMINAZIONE BIRAZIONALE DI UNA $\bar{V}_{r-2}$ O $\bar{W}_{r-2}$ DI UNA IPERSUPERFICIE $\bar{V}_{r-1}(O_h, \bar{\rho}_{r-1})$ .

Nei n° 60, 61, 62 e 63 abbiamo considerato il caso  $k=r$  per la  $V_k$  di cui, nel n° precedente 59, avevamo assegnato la determinazione birazionale involuppo  $\bar{V}_k(O_h, \bar{\rho}_k)$ .

Consideriamo ora, per tale  $\bar{V}_k$ , il caso  $k=r-1$ ; cioè consideriamo una ipersuperficie  $V_{r-1}$ , nella sua determinazione birazionale involuppo:

$$(11) \quad \bar{V}_{r-1}(O_h, \bar{\rho}_{r-1}),$$

la fine di dare la determinazione birazionale di una  $\bar{V}_{r-2}$  o  $\bar{W}_{r-2}$  di detta  $\bar{V}_{r-1}$ , considerata, *non come varietà subordinata dell'  $\bar{S}_r$  involuppo, nel qual caso vale la (9), ma come varietà ambiente* da sostituire all'  $\bar{S}_r$  involuppo nelle considerazioni precedenti. Inoltre la determinazione di tali  $\bar{V}_{r-2}$  o  $\bar{W}_{r-2}$  della  $\bar{V}_{r-1}$ , da dirsi birazionale, deve risultare invariante per

una trasformazione birazionale fra la  $V_{r-1}$ , da cui la  $\bar{V}_{r-1}$ , discende, ed una  $V'_{r-1}$  di un  $S'_r$ , trasformazione che può anche non essere biunivoca quando si opera nei punti di  $S_r$  fuori di  $V_{r-1}$ , cioè risulti solo generalmente biunivoca quando si opera fra  $V_{r-1}$  e  $V'_{r-1}$  (ovvero non sia una trasformazione cremoniana fra  $S_r$  ed  $S'_r$ ).

Siano

$$(12) \quad x_j' = h_j(x_1, \dots, x_{r+1})$$

$$(13) \quad x_j = k_j(x'_1, \dots, x'_{r+1})$$

le equazioni di una data trasformazione birazionale fra  $V_{r-1}$  di  $S_r$  e un  $V'_{r-1}$  di  $S'_r$ . Ogni falda  $\rho_{r-1}$  di  $V_{r-1}$  sarà trasformata in una falda  $\rho'_{r-1}$  della  $V'_{r-1}$  (e viceversa). Ne segue che *ogni ridotta della  $\rho_{r-1}$ , di origine  $O_h$ , dà luogo ad una falda unirazionale  $\bar{\rho}_{r-1}$  con la stessa origine  $O_h$ , che sarà trasformata in una falda unirazionale  $\bar{\rho}'_{r-1}$  ridotta della falda  $\rho'_{r-1}$  di  $V'_{r-1}$ , avente per origine  $O'_h$ , l'elemento di  $V'_{r-1}$  trasformato dell'elemento  $O_r$  di  $V_{r-1}$  origine  $\rho_{r-1}$ . In altri termini alla determinazione birazionale involuppo (11) della  $V_{r-1}$  corrisponde la determinazione birazionale involuppo*

$$(14) \quad \bar{V}'_{r-1}(O_h, \bar{\rho}'_{r-1})$$

della  $V'_{r-1}$ .

Ciò premesso consideriamo in  $S_r$  una ipersuperficie  $F_{r-1}$  di equazione

$$(15) \quad F(x_1, \dots, x_{r+1}) = 0,$$

e la sua *trasformata per ipersuperficie*,  $F'_{r-1}$  di  $S'_r$ , di equazione (per le (13)):

$$(16) \quad F(k_1(x'_j), \dots, k_{r+1}(x'_j)) = 0.$$

Indicando con  $B(O_h, \bar{\rho}_{r-1})$  e  $B'(O'_h, \bar{\rho}'_{r-1})$  le molteplicità d'intersezione birazionale di  $F_{r-1}$  e  $F'_{r-1}$  rispettivamente con le falde  $\bar{\rho}_{r-1}$  e  $\bar{\rho}'_{r-1}$ , e con  $E_r$ ,  $E'_{r-2}$  i sostegni birazionali delle varietà algebriche  $V_{r-2}$  e  $V'_{r-2}$  intersezioni delle  $V_{r-1}$  e  $V'_{r-1}$  rispettivamente con  $F_{r-1}$  ed  $F'_{r-1}$ , restano determinati: i due enti che indicheremo con  $\bar{V}_{r-2}$  e  $\bar{V}'_{r-2}$ , rispettivamente appartenenti a  $\bar{V}_{r-1}$  e  $\bar{V}'_{r-1}$ , ottenuto associando i sudetti sostegni con le funzioni numeriche date da tali intersezioni birazionali definite negli enti (11) e (14), cioè:



$$(17) \quad \bar{V}_{r-2} = [E_{r-1}; B(O_h, \bar{\rho}_{r-1})]$$

$$(18) \quad \bar{V}'_{r-2} = [E'_{r-1}, B(O'_h, \bar{\rho}'_{r-1})].$$

Gli enti (17) e (18) si diranno le  $\bar{V}_{r-2}$  e  $\bar{V}'_{r-2}$  *inviluppo intersezione delle ipersuperficie*  $F_{r-1}$  *ed*  $F'_{r-1}$ , *rispettivamente con le ipersuperficie*  $V_{r-1}$  *e*  $V'_{r-1}$  *assegnate nella loro determinazione inviluppo* (11) *e* (14). La  $\bar{V}'_{r-2}$  è la trasformata birazionale della  $\bar{V}_{r-2}$ , nella trasformazione birazionale assegnata fra  $V_{r-1}$  e  $V'_{r-1}$  cioè tali enti sono di pertinenza della *Geometria algebrica della*  $V_{r-1}$  *che studia le proprietà di*  $V_{r-1}$  *invarianti per trasformazioni birazionali.*

Le considerazioni relative al caso ordinario si estendono, al solito, al caso dell'indice di algebricità  $n$  qualunque. La (17) viene estesa alla relazione che da una  $\bar{W}_{r-1}$  con la notazione:

$$(19) \quad \bar{W}_{r-1} = [E^{(0)}_{r-1} + E^{(n)}_{r-1}, B(O_h, \bar{\rho}_{r-1})].$$

Si osservi esplicitamente che:

*Nel campo delle*  $\bar{W}_{r-1}$  *di una data*  $\bar{V}_{r-1}$  *si estendono le operazioni di somma, differenza, prodotto e quoto per un intero.*

## FORMAZIONE DI ATOMI E RADICALI LIBERI DURANTE LA CORROSIONE DEI METALLI

*Nota del Dr. Giuseppe Parravano, presentata dal socio F. Giordani*

(Adunanza del dì 7 novembre 1953)

**Sunto.** — L'A. si riferisce alle ricerche già da altri effettuate per conoscere le proprietà chimico-fisiche di superfici metalliche appena formate, le quali agirebbero come sorgenti potenziali di elettroni liberi; e si propone di estendere la indagine alle superfici "nascenti", prodotte per attacco chimico.

Facendo uso di reazioni di polimerizzazione a catena di un monomero olefinico, egli ha potuto dimostrare che si hanno, nella fase liquida circostante, processi di trasferimento di elettroni con la conseguente formazione di atomi o di radicali liberi.

La conoscenza delle proprietà chimico-fisiche delle superfici metalliche appena formate, ottenute ad esempio per abrasione meccanica o per attacco chimico, è di notevole importanza per lo studio di vari processi fisici e chimici, come la lubrificazione, la corrosione e la catalisi. Recentemente KRAMER <sup>1)</sup> ha potuto dimostrare che superfici metalliche fresche emettono elettroni a temperatura relativamente bassa. Questo fenomeno può essere considerato la causa di due altri effetti <sup>2)</sup>: l'effetto RUSSELL <sup>3)</sup>, e l'attivazione meccanica dei metalli scoperta da SHAW <sup>4)</sup>. Benchè il meccanismo dell'effetto emissivo proposto da KRAMER, postulando cioè la presenza sulle superfici metalliche fresche di uno strato non metallico, non sia con certezza provato, è da tenere presente che l'adsorbimento di gas può essere un fattore decisivo nel produrre l'emissione elettronica, come gli esperimenti di HAXEL, HOUTERMAN e SEEGER <sup>5)</sup> fanno supporre. In ogni caso però la superficie metallica agisce come una sorgente potenziale di elettroni liberi. Sorge così la possibilità di ottenere per mezzo di superfici metalliche appena formate reazioni di trasferimento elettronico nella fase

---

<sup>1)</sup> J. KRAMER, Zeit. Physik 125, 739, 1949; *Der metallische Zustand*, Göttingen, Vandenhoeck e Ruprecht, 1950; Zeit. Physik 128, 538, 1951; ibid. 129, 34, 1951.

<sup>2)</sup> L. GRUNBERG, Proc. Phys. Soc. B66, 153, 1953.

<sup>3)</sup> W. J. RUSSELL, Proc. Roy. Soc. 61. 424, 1897; 63, 102, 1899; 64, 409, 1906; 73, 385, 1906; 80, 376, 1908.

<sup>4)</sup> M. C. SHAW, J. Appl. Mech. 15, 37, 1948.

<sup>5)</sup> O. HAXEL, F. G. HOUTERMAN, K. SEEGER, Zeit. Physik 130, 109, 1951.

liquida circostante. Questo effetto è stato recentemente provato da GRUNBER<sup>2)</sup>. Questo autore ha ottenuto la formazione di acqua ossigenata in acqua aerata in cui superfici metalliche fresche erano state preparate per lavorazione meccanica. SHAW<sup>4)</sup> usando analoghe superfici metalliche ha prodotto rapide reazioni chimiche tra alcuni composti organici e le superficie stesse, mentre nelle stesse condizioni non si aveva nessuna reazione con il metallo normale.

In base a questi risultati è interessante indagare se anche superfici « nascenti » prodotte per attacco chimico presentano le caratteristiche proprietà esibite da superfici chimicamente analoghe ma formate per lavorazione meccanica. Gli esperimenti descritti qui di seguito sono stati condotti con superfici di ferro, zinco, magnesio e alluminio immerse in soluzioni diluite di acido cloridrico e solforico. Per determinare la presenza nella fase liquida di processi di trasferimento di elettroni e la conseguente formazione di atomi o radicali in questa stessa fase si è fatto uso di reazioni di polimerizzazione a catena di un monomero olefinico. Precedentemente era stato dimostrato come reazioni di polimerizzazione vinilica possono essere usate per lo studio di processi occorrenti su superfici metalliche<sup>6)</sup>.

### *Parte sperimentale.*

I metalli usati, in forma granulare erano della più elevata purezza ottenibile commercialmente. Acido solforico e cloridrico, chimicamente puri, sono stati portati alla concentrazione desiderata per diluizione con acqua distillata di fresco in apparecchio in vetro Pyrex; la soluzione risultante veniva titolata con i metodi usuali. Metilmetacrilato (ROHME e HAAS) è stato purificato prima dell'uso con ripetuti lavaggi con una soluzione acquosa di soda caustica e acqua distillata, seccato su cloruro di calcio e distillato sotto vuoto a bassa temperatura.

Quantità misurate dei vari reagenti venivano introdotte in provette di vetro, e queste ultime erano poi saldate ad una linea di alto vuoto. L'ossigeno presente nel sistema reagente veniva eliminato con solidificazione a bassa temperatura, evacuazione, e successivo riscaldamento a temperatura ambiente. Questo ciclo veniva ripetuto tre volte. Le provette erano poi chiuse alla fiamma sotto vuoto, portate a temperatura ambiente e immerse in un termostato ( $\pm 0, 1^\circ \text{C}$ ).

Il tempo richiesto per l'inizio dell'intorbidamento della soluzione limpida e per la precipitazione del polimero sono stati notati come un'indicazione della velocità relativa della reazione di polimerizzazione. Alla fine

---

<sup>6)</sup> G. PARRAVANO, J. Amer. Chem. Soc., 72, 3856, 1950.

di ogni esperimento le provette venivano aperte, ed il contenuto filtrato. Il polimero separato era lavato, seccato, e pesato ed il grado di polimerizzazione determinato viscosimetricamente, seguendo la procedura precedentemente descritta <sup>6)</sup>. Nel corso di ogni esperimento le provette di reazione erano tenute ferme, poichè in prove preliminari non fu notata nessuna differenza nella quantità di polimero finale tra i due casi di provette agitate continuamente o mantenute ferme.

Dalle quantità di polimero ottenute e dal suo peso molecolare si è determinato il numero di specie attive  $N_i$ , che hanno iniziato la catena polimerica <sup>6)</sup>. In tale calcolo si è trascurato ogni fenomeno di trasferimento di catena tra un radicale del polimero e una molecola del monomero. Siccome è noto che tale effetto è presente, benchè in misura minima, i valori di  $N_i$  calcolati e riportati qui di seguito rappresentano un valore limite superiore.

### *Risultati.*

I risultati ottenuti sono riportati nelle seguenti tabelle I, II, III.

TABELLA I

Formazione di polimetilmetacrilato (PMMA) durante l'attacco acido di alcuni metalli. Temp. 21°; C [MMA] = 0,1; molare [Acido] = 0,01 N. metallo 1 g.

Metallo	Acido	PMMA Tempo di precipi- tazione (ore)
Fe	HCl	10
Zn	HCl	12
Zn	HCl	13*
Zn	H <sub>2</sub> O	nulla dopo 72 ore
Mg	HCl	10
Mg	HCl	10*
Al	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	9
Al	H <sub>2</sub> O	nulla dopo 72 ore

\* Soluzione non deaerata.



TABELLA II

Sistema Zn-HCl. Numero di specie attive,  $N_i$ , formate nella fase liquida. Temp. 22° C; Zn = 1 g; [HCl] = 0,01 N.

Tempo (ore)	$N_i \times 10^{-16}$
8	6
12	12
16	20
20	30

TABELLA III

Sistema Zn-HCl. Effetto della concentrazione dell'acido e del metilmetacrilato sulla formazione di polimetilmetacrilato.

Zn = 1 g; tempo di reazione = 10 ore; temp. 22° C.

HCl (normalità)	MMA (moli/litro)	PMMA g.
0,01	0,1	0,09
0,03	»	0,1
0,06	»	0,09
0,01	0,05	0,04
0,01	0,15	0,14

TABELLA IV

Sistema Zn-HCl. Effetto della quantità di zinco sulla formazione di polimetilmetacrilato. [HCl] 0,01 N; [MMA] = 0,1 moli/litro; temp. 22° C.

Tempo di reazione 10 ore

Zn (g)	PMMA (g)
0,1	0,01
0,6	0,05
1,0	0,09

### *Discussione.*

I precedenti risultati sperimentali dimostrano che reazioni di polimerizzazione a catena possono venire innescate durante l'attacco corrosivo di alcuni metalli per mezzo di acidi non ossidanti. Da ciò può concludersi

che specie attive, sotto forma di atomi o radicali, vengono formate durante il processo corrosivo.

Poichè nei casi esaminati durante la reazione di corrosione si formano superfici « nascenti », appare plausibile supporre che qualche intrinseca proprietà di queste ultime determini gli effetti osservati. I risultati descritti sono in accordo con le ricerche di RUSSEL <sup>3)</sup> e con quelli più recenti di CHURCILL <sup>7)</sup>.

RUSSEL infatti ha dimostrato che la formazione di un'immagine su film fotografico a contatto con superfici metalliche fresche in presenza di acqua e ossigeno era dovuta a formazione di acqua ossigenata. Analogamente CHURCILL ha provato che acqua ossigenata veniva prodotta su superfici metalliche abrase di fresco e in contatto con acqua e ossigeno. In ambedue i casi la formazione di acqua ossigenata è stata spiegata con un meccanismo comportante atomi o radicali liberi.

In particolare alla luce delle ricerche di KRAMER i nostri risultati trovano una spiegazione immediata e suggestiva. Se si considera infatti il trasferimento di un elettrone tra la superficie metallica fresca ed un protone, proveniente dalla dissociazione di una molecola d'acqua, si ha la seguente reazione:



La decomposizione di  $\text{H}^3\text{O}$  segue preferenzialmente:



anzichè non:



come è stato indicato da BRYANT e COATES <sup>8)</sup>. In presenza di ossigeno si possono poi avere le seguenti reazioni:



Si ha perciò la formazione di almeno tre diversi tipi di specie attive:  $\text{H}$ ,  $\text{OH}$ ,  $\text{HO}_2$  capaci di iniziare reazioni di polimerizzazione <sup>8)</sup>. Poichè non si è trovata una differenza notevole tra prove condotte in assenza o meno di ossigeno si può concludere che nelle condizioni sperimentali usate atomi d'idrogeno siano presenti in maniera preponderante rispetto alle altre specie attive.

<sup>7)</sup> J. R. CHURCILL, Trans. Electrochem. Soc. 76, 341, 1939.

<sup>8)</sup> BRYANT e COATES: Discuss. Farad. Soc. The Electrode Process 114, 1947.

È interessante notare che i metalli, che secondo la tab. I sono stati provati attivi nell'iniziare reazioni di polimerizzazione durante attacco per mezzo di acido cloridrico o solforico, sono gli stessi metalli che secondo CHURCILL <sup>7)</sup> e GRUNBERG <sup>2)</sup> hanno mostrato attività per la formazione di acqua ossigenata.

Con i dati riportati nella tab. II può farsi un confronto tra il valore di N, ad es. dopo otto ore di reazione, ed il numero di atomi di zinco presenti sulla superficie del metallo. La densità superficiale degli atomi di zinco è di circa  $1,6 \cdot 10^{15}$  atomi/cm<sup>2</sup>. In base alle dimensioni medie dei granuli di zinco usati, si può calcolare un'area superficiale di zinco usata di 37 cm<sup>2</sup>. Si ha perciò che ogni atomo superficiale ha contribuito alla formazione di 0,8 specie attive, che è come dire che una parte degli iniziatori di catena presenti nel sistema sono stati prodotti per trasferimento di attività tra un radicale polimerico ed una molecola di monomero.

È interessante notare come la concentrazione dell'acido non abbia praticamente nessun effetto sulla quantità di PMMA formato (tab. III). Questo fatto può essere preso come un'indicazione che l'effetto in questione è dovuto alla superficie del metallo. Ciò è altresì confermato dal fatto che la quantità di polimero formato è funzione della quantità di zinco presente e quindi della superficie totale presente nel sistema reagente.

Secondo la nostra interpretazione dei fatti sperimentali descritti si ha un modo nuovo d'interpretare quella gamma di fenomeni eterogenei, che comportano la produzione di atomi o radicali liberi lontani dalle superfici metalliche, le quali intervengono in modo determinante nella loro formazione.

Secondo questa interpretazione infatti non è più necessario fare intervenire nel processo globale una reazione elementare fortemente esotermica, si da rendere possibile il desorbimento di atomi o radicali da superfici solide a bassa temperatura.

In particolare la spiegazione precedente suggerisce una suggestiva reinterpretazione delle proprietà riducenti della miscela Zn-HCl. Questa può infatti agire sia come diretta sorgente di elettroni per le molecole della fase liquida circostante (elettrodonatore), sia come produttrice di idrogeno atomico nella fase liquida.

ANDAMENTO ANNUALE MEDIO E ANDAMENTO REALE  
DELLA PIOGGIA A NAPOLI (CAPODIMONTE)

*Nota del dott. Cristofaro Mennella, presentata dal socio C. Colamonico*

(Adunanza del dì 5 dicembre 1953)

**Sunto.** — Dalla comparazione dei medii mensili di alcuni periodi dell'ottantennio 1866-1945 emerge come i valori normali dell'intera serie occultino taluni caratteri peculiari dell'andamento annuale più frequente e se ne indagano le cause; indi per delineare un profilo più rispondente all'andamento reale delle precipitazioni, vien ripartita l'annata pluviometrica (settembre-agosto successivo) in «fasi», delle quali si determinano le caratteristiche; infine si studiano le variazioni con riferimento a periodi eccezionali.

Lo studio delle più lunghe serie d'osservazioni pluviometriche, che per talune delle città italiane oggi si estendono ben al di là del secolo, comincia a rivelare un interesse insospettato in passato per il fatto che vi si riscontrano particolarità e correlazioni che non potevano emergere alcuni decenni addietro.

Tra l'altro, detto studio dimostra come non siano troppo attendibili, per rivelare l'andamento pluviometrico annuale in una determinata località, le serie relative anche a trenta — quarant'anni sulle quali, sino a poco tempo fa, si faceva notevole assegnamento, pel fatto che i valori secolari risultano notevolmente differenti da quelli relativi a periodi minori pur compresi nei primi.

Tuttavia lo stesso andamento annuale medio relativo a periodi secolari si addimostra, almeno per l'Italia peninsulare, sensibilmente differente dall'andamento reale, che è quello più frequente e che maggiormente interessa le attività pratiche come l'agricoltura, le industrie idroelettriche, ecc. Così, mentre alla stregua dei valori medi per Napoli risulterebbe, per un ottantennio, una regolare decrescenza delle quantità mensili di pioggia dal dicembre al luglio successivo, l'andamento dei valori più frequenti dimostra invece la persistenza di un minimo secondario che si manifesta alla fine dell'inverno o all'inizio della primavera, e che si riconnette al minimo invernale caratteristico della pianura padana. Detto minimo, in ottanta anni, si è verificato per Napoli almeno quindici volte su sedici, ed è stato seguito da un massimo secondario primaverile di una entità media oltre che doppia rispetto alla media del minimo in parola. Ebbene l'esistenza di quest'ultimo consente di bipartire l'annata pluviometrica — settembre — agosto successivo — che in altri lavori ho dimostrato senz'altro



preferibile a quella civile in uso — in due semestri che sono risultati del tutto indipendenti nel rispettivo andamento annuale e secolare.

L'indagine relativa a quest'ultima correlazione è stata da me condotta sul periodo ultrasecolare 1821 — 1947 (vedi Rendic. dell'Accademia delle Scienze in Napoli, 1949 e 1950): questo lavoro, invece, prende in esame, per l'inesistenza di taluni dati, il periodo 1866 — 1945 (un ottantennio). L'analisi è stata condotta sugli stessi valori medi mensili ordinari. Naturalmente, l'ineguaglianza dei mesi produce sensibili differenze rispetto ai valori che si otterrebbero col ripartire le quantità di pioggia in periodi mensili di uguale durata o ricorrendo alle formule besselliane. Una soluzione pratica intermedia sarebbe quella di modificare i dati riferendoli a mesi di trenta giorni e mezzo ciascuno. Ma per il fatto che con analisi di questo genere non si mira che a cogliere le caratteristiche essenziali del fenomeno, e ancora perchè in quasi tutti i lavori di pluviometria ci si attiene, generalmente, ai mesi ordinari, non ho ritenuto modificare i risultati naturali delle osservazioni. Va tenuto presente tuttavia che, per una soddisfacente approssimazione, occorre considerare più elevati di un sessantesimo circa le quantità medie di pioggia dei mesi di trenta giorni, diminuiti pressochè della stessa eliquota le medie e i totali eccezionali dei mesi di trentuno giorni, mentre per il febbraio, per il quale si verifica l'inconveniente maggiore, bisogna incrementare i valori rispettivi di poco meno di un dodicesimo.

Della opportunità di ripartire i totali mensili delle precipitazioni per annate pluviometriche (settembre — agosto successivo) al fine di evitare non poche alterazioni fittizie che si producono con le distribuzioni convenzionali come quella per anni civili, ho trattato in altra Nota (1).

Con la presente mi propongo di tracciare un profilo dell'andamento annuale più frequente, che non corrisponde a quello indicato dai valori normali dell'ottantennio, e di indagare intorno alle principali variazioni verificatesi in detto periodo.

I medii mensili dell'ottantennio, ricavati dai dati registrati all'Osservatorio Astronomico di Capodimonte (m. 149 sul mare), risultano:

S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Media
73,6	125,7	115,9	120,7	98,7	74,3	71,9	68,4	51,1	36,0	16,9	24,3	878,0

Da essi si rileva il massimo principale nell'ottobre, un minimo secondario nel novembre, un massimo secondario nel dicembre e, a partire da

<sup>1)</sup> C. MENNELLA. *Sulla scelta della distribuzione udometrica annuale per Napoli — Capodimonte*. Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli, 1950.

questo, una graduale diminuzione sino al minimo principale del luglio. Ebbene l'andamento del periodo gennaio — luglio, almeno nella quasi totalità degli anni, non è affatto conforme a tale decrescenza; invece si ha quasi sempre un minimo più o meno profondo alla fine dell'inverno o all'inizio della primavera, al quale fa seguito un massimo secondario primaverile (talvolta principale) abbastanza spiccato; e il minimo della fine dell'inverno divide l'annata pluviometrica in due periodi nettamente distinti, di cui il primo ad andamento più stabile e il secondo ad andamento più variabile. Questa suddivisione costituisce una delle caratteristiche più salienti del fenomeno nella zona, che pure non si rileva dai medii mensili dell'ottantennio.

Tuttavia quel minimo e il successivo massimo secondario figurano, benchè in forma attenuata, nei medii del periodo 1866 — 1900 considerato dall'ALBERTI <sup>1)</sup> e in quello 1901 — 1925 considerato dall'AURINO <sup>2)</sup> che qui riporto:

S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Media
69,5	125,6	112,0	120,7	97,5	63,1	73,1	75,5	53,4	31,6	19,1	23,6	865,5
78,8	144,8	116,8	119,2	86,4	83,5	74,2	72,2	44,5	46,6	18,1	20,9	906,6

Dai primi, si rileva un nettissimo massimo primaverile nel marzo-aprile, e dai secondi una graduale diminuzione sino al maggio e un massimo secondario piuttosto limitato nel giugno,

I medii mensili dell'ultimo ventennio (1926 — 1945), considerato dal GUERRIERI in un lavoro tuttora inedito, sono:

S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Media
74,2	102,1	121,5	122,7	116,2	82,3	67,0	50,8	55,3	30,0	11,5	29,5	864,0

Da questi si rileva un andamento differente anche per il semestre autunno — inverno: infatti mentre negli altri periodi si aveva il massimo principale nell'ottobre, (e un massimo secondario nel dicembre) in questo si ha il solo massimo principale spostato però al dicembre; nel semestre

<sup>1)</sup> V. ALBERTI. *Sul clima di Napoli*, (1866 - 1900).

<sup>2)</sup> S. AURINO. *Sul clima di Napoli*, (1901 - 1925).

primavera — estate il massimo secondario cade nel maggio. Come si è detto, dai valori normali dell'ottantennio questo massimo secondario scempare del tutto.

Le cause possono ravvisarsi nel fatto che l'andamento del semestre primavera — estate è sensibilmente variabile da un nanno all'altro; infatti nei tre periodi suddetti il massimo primaverile si è verificato la prima volta nell'aprile, la seconda nel giugno e la terza nel maggio; questa circostanza fa sì che nei medii dell'ottantennio i valori spettanti a ciascuno di detti mesi risultano più o meno compensati e livellati. Ma un'altra causa sta nel fatto che nel corso del ventennio 1926 — 1945 si sono verificati ben sedici semestri primavera — estate con totali inferiori alla media normale di quel semestre per l'intero ottantennio, e ciò ha prodotto un sensibile abbassamento dei medii di quei mesi che sono, generalmente, discretamente piovosi. Per tanto si può arguire che ove sopravvenga un periodo (almeno ventennale) con semestri primavera — estate normali o piuttosto piovoso, i medii mensili del marzo e dell'aprile potranno ricostruire il massimo primaverile anche nella serie dei valori normali.

Comunque, quanto precede fornisce una prima idea della entità delle variazioni della pioggia nei periodi secolari per la zona considerata, e un notevole esempio del come i medii, anche per periodi considerevolmente lunghi, possano non rendere il reale andamento fisico di un fenomeno.

#### *Le varie « fasi » dell'annata pluviometrica.*

Poichè la riparazione dell'anno in mesi si dimostra inadeguata a rivelare talune manifestazioni non ricorrenti ad epoca fissa, per lo studio del reale andamento annuo della pioggia ho ripartito l'annata pluviometrica in periodi di diversa durata ma corrispondenti, almeno per la generalità dei casi, ad una particolare manifestazione dell'andamento della pioggia nell'epoca determinata. Detti periodi o « fasi » restano in parte concordanti coi medii mensili, ma si dimostrano molto più adatti per rendere le caratteristiche di quell'andamento. Però dette fasi non debbono venir considerate rigorosamente fisse per gli estremi, ma intese con una certa elasticità per la durata a per l'epoca che generalmente comprendono.

Ho individuato così le seguenti fasi :

- 1) — fase *incipiente*, comprendente, generalmente, l'agosto e il settembre, con poco meno di 100 millimetri di pioggia ;
- 2) — fase *preminente*, comprendente, generalmente, l'ottobre, il novembre e il dicembre, con circa 360 mm. ;
- 3) — fase *regressiva*, comprendente, generalmente, il gennaio e il febbraio, con circa 170 mm. ;

4) — fase *recrudescente*, comprendente il marzo e l'aprile, con circa 140 mm.;

5) — fase d' *esaurimento*, comprendente, generalmente, il maggio, il giugno, il luglio, con 100 mm. circa.

Al fine di indagare sul reale apporto, sull'esistenza, sulla oscillazione tra i mesi delle singole fasi in tutte le annate dell'ottantennio considerato è stato ripartita, ciascuna annata, su apposito prospetto, in periodi corrispondenti alle fasi stesse sempre che queste fossero state individuabili con sicurezza, mentre si è tenuto ugualmente conto dei casi in cui qualcuna di esse risultava mancante o comunque anomala. Così è stato possibile stabilire in quante annate dell'ottantennio si è avuto un andamento regolare, corrispondente al comportamento più frequente, e quante volte questo non si è verificato, e in quale misura. In breve, si è potuto stabilire sino a che punto i valori normali corrispondono all'andamento effettivo.

Riassumo qui i risultati principali di detta analisi.

#### *Fase incipiente.*

Si verifica, generalmmente, nell'agosto e nel settembre, con apporto al totale annuo oscillante intorno ai 100 millimetri;

per 54 volte ha compreso effettivamente detti mesi;

per 12 volte soltanto l'agosto, perchè il settembre è entrato a far parte della fase successiva, talvolta per il suo totale abbastanza elevato, altre volte per la relativa limitatezza di quella;

per 5 volte ha compreso l'agosto, il settembre e l'ottobre;

per 1 volta il settembre, l'ottobre, il novembre;

per una volta è durata sino al dicembre e per un'altra sino al gennaio (1936 — 37);

per 3 volte è mancata, in quanto si è avuto un inizio abbastanza elevato (negli anni 1928, 1937, 1938);

per 4 volte l'agosto non ha dato pioggia;

per quantità, ha variato da pochi millimetri di pioggia a 160 mm. circa.

#### *Fase preminente.*

Comprende, generalmente, l'ottobre, il novembre e il dicembre, ma con sensibili variazioni nei limiti da un anno all'altro;

per 20 volte ha compreso effettivamente detti mesi (da 260 a 500 mm. circa);



per 22 volte si è estesa anche al gennaio pur mancando, talvolta, alla norma dei totali elevati, qualcuno dei mesi intermedi;

per 5 volte ha compreso anche il febbraio;

per 22 volte ha compreso anche il settembre;

per 8 volte è rimasta limitata a due mesi, talvolta caduti nell'inverno anzichè nell'autunno;

per due volte ha compreso un mese solo (gennaio 1881 e ottobre 1924)

ha toccato il valore complessivo più elevato nel 1944—45 (dal settembre al febbraio, con 890 mm.);

ha registrato il valore minimo nel 1879 — 80 (ottobre e novembre, con 120 mm.) e nel 1924 — 25, col solo ottobre (83 mm.).

### *Fase regressiva.*

Comprende, generalmente, gli ultimi mesi dell'inverno e qualcuno della primavera;

si è avuta per 22 volte effettivamente nel gennaio — febbraio;

per 9 volte ha compreso il solo gennaio, pel fatto che il febbraio ha fatto parte della fase successiva;

per 11 volte ha compreso febbraio e marzo;

per 2 volte dicembre e gennaio;

per 1 volta il solo dicembre;

per 1 volta l'aprile;

per 7 volte soltanto il febbraio;

per 5 volte soltanto il marzo;

per 11 volte si è protratta per 3 mesi;

per 6 volte per 4 mesi;

2 volte è mancata;

per 1 sola volta è risultata indistinta;

per quantità ha variato da pochi millimetri a 250 circa.

(Questa fase vien detta « *regressiva* » non in valore assoluto, ma perchè corrisponde al minimo invernale che vi si verifica).

### *Fase recrudescente.*

Questa si identifica, in effetti, col massimo secondario primaverile, il quale fa seguito al minimo secondario che bipartisce l'annata; pertanto le sue oscillazioni nel tempo coincidono con quelle subite da detto minimo; quanto all'estensione, essa comprende, generalmente, un mese solo, ecce-

zionalmente due, il più delle volte il marzo e l'aprile, raramente l'aprile e il maggio); poche volte detta fase si è verificata nel giugno e una volta sola, ma con andamento anomalo, ha compreso il giugno e il luglio (annata 1867-68); due volte è mancata. Le variazioni subite da questa fase verranno precisate descrivendo il comportamento del massimo primaverile.

*Fase d'esaurimento.*

Comprende gli ultimi tre o due mesi dell'annata pluviometrica, dal maggio in poi, i quali, generalmente, non hanno che poche decine di mm. di pioggia per ciascuno;

per 30 volte ha compreso effettivamente il maggio, il giugno e il luglio;

per 19 volte 4 mesi, comprendendo anche l'aprile;

per 11 volte 5 mesi, a partire dal marzo;

per 20 volte meno di 3 mesi;

qualche volta è mancata;

per quantità, si è aggirata sui 100 mm. di pioggia;

poche volte in essa si è verificato un quarto massimo dell'annata.

*Massimo principale dell'annata pluviometrica.*

Questo si è verificato nei mesi, con la frequenza, col valore massimo minimo e medio rispettivi indicati nel seguente specchietto:

Mese	N. casi	Val massimo	Val. minimo	Val. medio
Settembre	6	215,3	110,5	158,9
Ottobre	18	391,3	142,0	219,4
Novembre	14	276,5	122,2	191,0
Dicembre	25	281,6	106,6	183,7
Gennaio	9	276,4	111,3	180,0
Febbraio	3	140,4	104,1	121,5
Marzo	4	201,6	113,9	156,5
Aprile	1	105,7	105,7	105,7
Media complessiva				186,1

Detto massimo per due volte ha superato i 300 mm., per 10 volte i 250, per 31 volte i 200, per 3 volte non ha superato i 106 mm.

Inoltre, come si rileva dallo specchietto, per 17 volte esso si è verificato dopo il dicembre, ossia nell'anno civile successivo; in quasi tutti detti casi l'andamento complessivo dell'anno civile è risultato alterato rispetto a quello dell'annata pluviometrica.

### *Il primo minimo secondario.*

La presenza di un primo minimo, rilevabile dai medii dall'ottantennio nel novembre, si riscontra nello stesso mese nei periodi 1866-1900 e 1901-1925, ma non nell'ultimo (1926-1945) che anche per questo aspetto risulta non conforme all'andamento normale; infatti si rileva un unico massimo nel novembre-dicembre, che registrano medii quasi uguali.

Comunque, il primo minimo secondario si è effettivamente verificato per 54 volte nell'ottantennio, e con una media, per detti casi, di 65 mm. Per 26 volte manca.

Si è verificato:

- per 9 volte nell'ottobre;
- per 25 volte nel novembre;
- per 19 volte nel dicembre;
- per 1 volta nel gennaio.

Si può considerare oscillante con maggiore frequenza, tra il novembre e il dicembre. Va notato però che la presenza di questo minimo di fine autunno non assume un carattere di forte probabilità.

### *Secondo massimo (invernale).*

Questo, segnalato dai valori mensili normali nel dicembre, si è effettivamente verificato soltanto negli anni in cui si è avuto il primo minimo secondario di cui si è detto innanzi, ossia per 54 volte. Ma per 24 di tali casi è stato massimo principale. Comunque la sua media è risultata di 156,3 mm.

Si è verificato:

- per 5 volte nel novembre;
- per 22 volte effettivamente nel dicembre;
- per 22 volte nel gennaio;

per 5 volte nel febbraio.

Dunque, ha una maggiore frequenza nel dicembre e nel gennaio.

*Secondo minimo secondario (fine inverno-inizio primavera).*

Come si è detto, questo minimo non figura tra i valori mensili normali dell' ottantennio, ma è presente nei singoli periodi 1866-1900, 1901-1925, 1926-1945 benchè cada nel febbraio per il primo periodo, nel maggio per il secondo e nell' aprile per l' ultimo.

Effettivamente si è verificato :

per 2 volte nel dicembre ;  
per 19 volte nel gennaio ;  
per 29 volte nel febbraio ;  
per 21 volte nel marzo ;  
per 4 volte nell' aprile ;  
per 5 volte manca.

La media risulta di 42,3 mm.

Come si rileva, si verifica con maggiore frequenza nel gennaio, nel febbraio e nel marzo. Comunque per 15 casi su 16 si è effettivamente verificato un distacco più o meno accentuato tra i due semestri dell' annata pluviometrica.

*Il massimo secondario primaverile.*

Questo si è verificato per ben 78 volte su ottanta, e precisamente si è avuto :

per 12 volte nel febbraio ;  
per 22 volte nel marzo ;  
per 25 volte nell' aprile ;  
per 11 volte nel maggio ;  
per 7 volte nel giugno ;  
per 1 volta nel luglio.

La media rispettiva è di 108,7 mm. Questa segna un aumento di ben 66 mm. sul minimo precedente.

Detto massimo cade più frequentemente tra il marzo e l' aprile, meno frequentemente nel febbraio e nel maggio.



Ha variato tra i 50 e i 201 mm. circa.

*Il minimo principale (estivo).*

Delle varie fasi dell'annata pluviometrica questa è la più stabile; infatti il minimo principale non oscilla, da un anno all'altro, che di qualche mese, ma cade frequentemente nel luglio, circostanza che induce a cominciare l'annata dall'agosto.

Sono stati del tutto senza pioggia:

- per 2 volte il giugno;
- per 12 volte il luglio (in tre casi anche consecutivi);
- per 4 volte l'agosto;
- per 1 volta il settembre;

per una sola volta (1928) si sono avuti sia il luglio che l'agosto del tutto senza pioggia; ma da uno studio decadico delle precipitazioni risulterebbe come siano abbastanza frequenti i periodi estivi con 40-50 giorni senza pioggia.

La media normale del luglio è di 16 mm.; ma il valore più frequente calcolato omettendo dai totali mensili quelli che si sono dimostrati fortemente eccezionali o addirittura anomali, scende a 11 mm. contro i 27 del giugno e i 19 dell'agosto calcolati allo stesso modo. Tutti questi elementi concorrono nell'indicare che, con elevata probabilità, il minimo principale si ha precisamente in detto mese. Per 51 volte il luglio ha dato una quantità di pioggia inferiore a quella dell'agosto.

*La media mensile uniforme.*

Considerando la pioggia uniformemente ripartita nei diversi mesi, si avrebbe una media uniforme di 73,04 mm. Dei medii mensili dell'ottantennio sei (dal settembre al febbraio) sono superiori a tale valore e sei (dal marzo all'agosto) inferiori. Detta media è stata effettivamente superata, nei diversi anni dell'ottantennio.

da 1 mese (aprile 1879-80)	in 1 anno;
da 2 mesi	» 2 anni;
da 3 »	» 3 »
da 4 »	» 16 »
da 5 »	» 24 »
da 6 »	» 16 »
da 7 »	» 10 »
da 8 »	» 4 »

Da questo specchietto si rileva che sono molto più numerosi gli anni (50 contro 14) con un numero di mesi inferiori a sei con totale superante la media uniforme, rispetto a quelli con un numero di mesi superiori a sei superanti quella stessa media.

Ecco il numero degli anni in cui si sono avuti diversi mesi con quantità di pioggia superiore ai 100 mm. (sempre con distribuzione per annate pluviometriche):

1 mese solo	ha	superato i 100 mm.	in 9 anni ;
2 mesi »	hanno	»	in 12 anni ;
3 » »	»	»	in 24 anni ;
4 » »	»	»	in 22 anni ;
5 » »	»	»	in 11 anni ;
6 » »	»	»	in 2 anni .

Con maggiore frequenza, tre o quattro mesi dell'annata superano i 100 mm.

Ecco il numero degli anni in cui si sono avuti diversi mesi che hanno superato i 150 mm. :

1 mese solo	ha	superato i 150 mm.	in 24 anni ;
2 mesi soli	hanno	»	in 26 anni ;
3 » »	»	»	in 9 anni ;
4 » »	»	»	in 2 anni .

Infine, ecco il numero degli anni in cui diversi mesi hanno superato i 200 e i 300 mm. :

per 31 anni vi è stato almeno un mese con oltre 200 mm. di pioggia ;  
 per 3 anni vi sono stati due mesi con oltre 200 mm. ;  
 per 2 anni vi è stato un mese che ha superato i 300 mm. (l'ottobre).

Ecco il numero dei semestri scarsi (marzo-agosto) che abbiano avuto diversi mesi con totali superiori ai 100 mm. :

39 semestri hanno avuto almeno un mese superiore ai 100 mm. :  
 6 semestri hanno avuto almeno due mesi con totale sup. a 100 mm. :  
 1 semestre solo ha avuto 3 mesi con totale superiore ai 100 mm.

Per 53 volte si è avuta una recrudescenza più o meno sensibile verso la fine dei semestri scarsi, ma soltanto in casi molto meno numerosi si è

trattato di un vero e proprio quarto massimo dell'annata. Comunque l'andamento di regolare decremento dopo il massimo primaverile, indicato dai valori normali, non si è avuto che per 27 volte. I valori eccezionali piuttosto frequenti del giugno, dei quali si dirà più innanzi, possono costituire detto quarto massimo. In questa ultima casistica non si è tenuto conto però dell'agosto, che spesso dà quantità superiori a quelle del luglio. Del resto, l'agosto è stato considerato facente parte della fase incipiente appunto per tale ragione.

### *I « tipi » dei due semestri.*

Da quanto è stato esposto risulta che il semestre abbondante (sett.-febb.) assume, con quasi uguale frequenza, uno dei seguenti andamenti che costituiscono tipi particolari :

1) — Massimo preminente nell'ottobre, minimo nel novembre e primo massimo secondario nel dicembre-gennaio ;

2) — Primo massimo nell'ottobre, n.a non principale, minimo nel novembre e massimo principale nel dicembre-gennaio ;

3) — Progressivo aumento delle precipitazioni a cominciare dal settembre e unico massimo (principale) nel novembre o nel dicembre.

Il semestre scarso (marzo-agosto) si conforma con maggiore frequenza al primo, e con minore frequenza ai successivi dei seguenti tipi :

1) — Massimo secondario (talvolta principale) in uno dei primi mesi (marzo-aprile), e lieve recrudescenza in uno degli ultimi, ma che talvolta manca ;

2) — Massimo del semestre spostato verso uno degli ultimi mesi (maggio o giugno e talvolta persino luglio) ;

3) — Un primo massimo nei primi mesi e un secondo massimo vero e proprio in uno degli ultimi.

### *I valori estremi.*

Sempre per giudicare di quanto l'andamento reale differisce da quello medio indicato dai valori normali, riporto nel seguente specchietto i valori estremi, massimi e minimi, verificatisi nell'ottantennio per i singoli

mesi, per le stagioni, per i semestri, per le annate pluviometriche, con l'indicazione dell'epoca in cui si sono rispettivamente verificati.

Mese, stag., sem.	Massimi		Minimi		Media
	Totale	Epoca	Totale	Epoca	
Settembre	215,7	1910	0,0	1870	73,64
Ottobre	391,3	1918	7,3	1945	125,76
Novembre	276,5	1933	10,2	1897	115,93
Dicembre	281,6	1869	14,9	1888	120,73
Gennaio	276,4	1915	9,3	1925	98,82
Febbraio	197,1	1924	1,2	1894	74,24
Marzo	201,0	1939	5,3	1945	71,51
Aprile	169,2	1879 1919	0,5	1914	68,25
Maggio	198,3	1939	1,6	1920	50,69
Giugno	169,8	1868	0,0	1874	35,93
Luglio	147,2	1868	0,0	1945 1871	16,88
Agosto	114,8	1939	0,0	1880	24,17
Autunno	644,5	1910	103,5	1880	315,33
Inverno	491,0	1870	75,3	1866	293,79
Primavera	413,3	1939	54,0	1945	190,45
Estate	336,5	1668	0,1	1928	76,98
Sem. abbond.	922,0	1944-45	244,0	1879-80	609,12
Sem. scarso	507,6	1867-68	76,7	1945-46	267,43
Anno pluv.	1242,2	1910-11	472,3	1879-80	876,5

I medii mensili qui riportati sono stati calcolati sulla distribuzione per annate pluviometriche; essi differiscono lievemente, per alcuni mesi, da quelli ottenuti per anni civili. Le medie dei totali eccezionali per le annate sono state riportate in altra Nota <sup>1)</sup>; quelle per i diversi mesi saranno riportate in altro specchietto.

<sup>1)</sup> C. MENNELLA. *La previsione delle disponibilità idriche estive nel Napoletano*. Rendic. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, 1949.



### *Caratteristiche delle precipitazioni.*

Altre caratteristiche delle precipitazioni, come media dei giorni piovosi per ciascun mese, intensità media, frequenza dei giorni di pioggia, abbondanza ecc., sempre riferiti ai valori normali dell' ottantennio, sono riportate nel seguente specchio:

	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A
Altezza	73,64	125,76	115,93	120,73	98,82	74,24	71,51	68,25	50,69	35,93	16,88	24,17
Gior. p.	7,1	12,1	13,6	14,2	12,7	11,2	11,9	11,2	8,5	5,6	2,5	3,7
Intens.	10,37	10,39	8,54	8,49	7,78	6,62	6,00	6,09	5,96	6,41	6,75	6,53
Freq.	0,23	0,39	0,45	0,45	0,41	0,39	0,38	0,37	0,27	0,18	0,08	0,12
Abbond.	2,45	4,05	3,86	3,89	3,18	2,63	2,30	2,27	1,63	1,19	0,54	0,78
Piov. rel.	0,08	0,14	0,13	0,13	0,11	0,08	0,08	0,07	0,05	0,04	0,02	0,02

Media annua . . . . . 876, 5 mm.

Media giorni piov. . . . . 114, 3

Intensità media . . . . . 7,66 mm.

Frequenza . . . . . 0,31

Abbondanza . . . . . 2,40 mm.

Si notino il massimo dei giorni piovosi nel dicembre e le uguali frequenze massime nel novembre e nel dicembre.

### *I totali mensili più frequenti.*

Per ciascun mese ho determinato il totale medio della pioggia per quegli anni in cui il mese stesso non è stato eccezionale. Con una certa approssimazione, quel totale può dirsi il valore più frequente. Scopo di questa determinazione è stato quello di precisare se la maggiore altezza di pioggia di un mese rispetto ad altri si verifica in una grande maggioranza di casi o è dovuta, piuttosto, alla forte entità di valori eccezionali. In questa evenienza, negli anni ordinari il comportamento effettivo della pioggia nei mesi considerati sarà nettamente differente da ciò che indicano i medii. E questo, infatti, ho potuto constatare specie per taluni mesi autunnali.

Ho preferito non seguire il metodo più razionale ma meno redditizio agli effetti pratici dell' indice di variabilità o di dispersione; con questo, si ottiene un concetto intorno all' attendibilità della media e all' entità de-

gli scostamenti, ma non si rende possibile una determinazione concreta sia del valore più frequente, che di quelli eccezionali per ciascuno dei due versi. Ho seguito perciò un metodo meno razionale, ma più rapido e più pratico.

Constatato che i valori più eccezionali e perciò con scostamenti più rilevanti dalla media sono quelli alti, adottando un criterio uniforme per tutti i mesi ho tolto dalla serie dei totali di ciascuno i sette valori più elevati e i tre meno elevati, e ho determinato la media dei primi, dei secondi e dei rimanenti della serie, che sono non eccezionali e perciò più frequenti. La probabilità, in ciascun anno, che un totale mensile determinato non differisca notevolmente dal valore calcolato come media dei casi non eccezionali è così di sette ad otto, mentre quella per un valore eccezionale è di uno a otto. La media, anche determinata, dei valori eccezionali permette di stabilire l'ordine di grandezza per tali valori e di giudicare se un totale registrato rientri o meno tra quelli.

Riporto nel seguente specchietto i medii mensili dell'ottantennio per ciascun mese, il valore massimo, la media dei sette valori più elevati effettivamente registrati, il valore minimo, la media dei tre valori meno elevati, la media approssimata dei totali non eccezionali e, infine, la variabilità per ciascun mese espressa in percentuale del medio corrispondente è data dalla differenza tra il medio stesso e il valore medio dei mesi non eccezionali.

	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A
Medii	73,6	125,7	115,9	120,7	98,8	74,2	71,5	68,2	50,6	35,9	16,8	24,1
Mass.	215	391	260	281	276	197	201	169	198	169	147	114
Med. M.	191	275	225	243	210	166	158	151	132	125	71	79
Min.	0,0	7,0	10,0	15,0	9,0	1,0	5,0	0,5	1,6	0,0	0,0	0,0
Med. m.	2,8	19,1	23,4	18,3	16,3	3,1	8,6	4,6	2,5	0,1	0,0	0,0
Med. fr.	64,9	115,2	108,9	112,8	91,0	68,0	65,4	62,6	44,6	28,5	12,1	19,6
Var. %	11,8	8,3	6,0	6,5	7,8	8,3	8,5	8,2	11,8	20,6	27,9	18,6

I totali più eccezionali sono dunque quelli dell'ottobre, che raggiungono una media di 275 mm., seguiti da quelli del dicembre. Il novembre raggiunge totali sensibilmente più modesti. Si rileva ancora la graduale diminuzione delle medie dei totali eccezionali sino al luglio. Per la variabilità, si osserva che essa è notevole nel settembre, maggiore nell'ottobre che nel dicembre, minima nel novembre, più sensibile dal gennaio al maggio, abbastanza elevata nel giugno e nell'agosto, massima nel luglio.

*Andamento annuale più frequente.*

Per determinare un profilo dell'andamento annuale più approssimato dei valori medi al reale comportamento della pioggia, ho costruito un grafico le cui ordinate corrispondono ai valori determinati per le singole fasi e per i punti caratteristici di cui si è detto innanzi. Però le rispettive ascisse non vanno interpretate come rigorosamente rispondenti alle epoche contrassegnate, bensì come l'indicazione di un'epoca approssimata, oscillante entro i limiti di qualche mese.

Le ordinate di cui si è usufruito, ricavate coi procedimenti e in base alle considerazioni esposte sono sei, e precisamente:

1) — Massimo principale (186 mm), attribuito all'ottobre ma che può verificarsi, sensibilmente più attenuato, nel novembre o nel dicembre;

2) — Primo minimo secondario (65 mm), attribuito al novembre, ma che può cadere anche nel dicembre;

3) — Primo massimo secondario, invernale (156 mm), attribuito al dicembre e che spesso diviene massimo principale;

4) — Secondo massimo secondario, primaverile (108 mm) attribuito al marzo-aprile;

5) — Secondo minimo secondario, tra i due massimi precedenti, sulla fine dell'inverno (42 mm) attribuito al febbraio, ma che può cadere anche nel marzo;

6) — Minimo principale, estivo (16 mm): cade generalmente nel luglio.

L'andamento effettivo della pioggia, con una certa approssimazione, risponde meglio a questo schema che non a quanto viene indicato dai medii dell'ottantennio.

*Andamento di sovrabbondanza o di carenza.*

Per lo studio delle variazioni, anzichè riferirmi a periodi più o meno convenzionali (decenni, quinquenni, ecc.), ho preferito rilevare nell'ottantennio i periodi continuativi di sovrabbondanza di pioggia o di eccezionale scarsità, di qualsiasi durata essi fossero. E ciò perchè agli effetti agricoli, ecologici, tecnici sono appunto quei periodi che possono determinare conseguenze più o meno temibili per il sommarsi, in più annate consecutive, degli stessi effetti.

Nella serie delle annate pluviometriche ho riscontrato i seguenti periodi continuativi notevoli con totali annui superiori alla media:

1867-68 / 1870-71	(4 anni)	eccedenza	431 mm.
1872-73 / 1875-76	(4 anni)	»	368 mm.
1914-15 / 1918-19	(5 anni)	»	1060 mm.
1937-38 / 1941-42	(5 anni)	»	670 mm.

Il terzo di tali periodi può dirsi di eccezionale sovrabbondanza.

Nella stessa serie ho riscontrato i seguenti periodi continuativi notevoli con annui inferiori alla media:

1924-25 / 1927-28	(4 anni)	deficienza	749 mm.
1929-30 / 1932-33	(4 anni)	"	555 mm.

Detti periodi non sono separati che da un solo anno con totale di 67 mm. superiore alla media; per tanto si potrebbe parlare di un unico periodo di carenza eccezionalmente lungo.

Inoltre si riscontrano 4 periodi di tre anni ciascuno, con totali inferiori alla media.

Nella serie dei semestri abbondanti si riscontrano periodi continuativi ininterrotti, con totali superiori alla media del semestre, rispettivamente di 6 , 5 , 4 semestri ciascuno, e periodi continuativi di 4, e 3 semestri ciascuno con totali inferiori alla media.

Nella serie dei semestri scarsi si riscontrano due periodi di 4 semestri ciascuno con totali superiori alla media del semestre stesso, e periodi di 4 , 9 , 5 semestri con totali inferiori alla media.

Periodi continuativi di semestri sia abbondanti che scarsi con totali superiori alle medie rispettive non hanno mai superato i quattro semestri, mentre si sono verificati periodi ininterrotti comprendenti anche otto semestri con totali inferiori alla media.

Lo studio particolareggiato degli anni eccezionali verrà compiuto in altra Nota.

*Casamicciola (Osservatorio Geofisico), nov. 1953.*



# SULLE SINGOLARITÀ DEGLI ZERI DI UNA FUNZIONE SUPERCOMPLESSA

*Nota del socio ordinario Nicolò Spampinato*

(Adunanza del dì 5 dicembre 1953)

**Sunto.** - Si inizia lo studio delle singolarità degli zeri di una funzione supercomplessa  $F(\mu)$ , totalmente derivabile, nel caso che si tratti di una funzione razionale intera biduale.

1. Una funzione  $F(\mu)$ , totalmente derivabile, della variabile biduale  $\mu = xu + yv$  è del tipo:

$$(1) \quad F(\mu) = f(x)u + [f'(x)y + g(x)]v,$$

con  $f(x)$  e  $g(x)$  due qualunque funzioni derivabili della variabile complessa  $x$ , in un campo del piano di GAUSS, dove si suppone distesa la variabile complessa  $x$ . La  $F(\mu)$  risulta una funzione razionale intera

$$(2) \quad F(\mu) = a_0 \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + \dots + a_n$$

quando e solo quando sono funzioni razionali intere  $f(x)$  e  $g(x)$ , e posto

$$(3) \quad f(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n,$$

$$(4) \quad g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$$

fra i coefficienti complessi di  $f(x)$  e  $g(x)$  ed i coefficienti biduali di  $F(\mu)$  si hanno le relazioni:

$$(5) \quad a_j = c_j u + b_j v, \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

Il numero biduale  $\mu$  risulta uno zero della funzione  $F(\mu)$  data dalla (1) quando e solo quando la coppia di numeri complessi  $(x, y)$  soddisfa al sistema:

$$(6) \quad f(x) = 0, \quad f'(x)y + g(x) = 0.$$

In particolare:

I) Gli zeri della funzione intera biduale  $F(\mu)$  data dalla (2) sono

tutti e soli i numeri biduali  $\mu = xu + yv$  con la coppia di numeri  $(x, y)$  soluzioni del sistema delle due equazioni algebriche (6) con  $f(x)$  e  $g(x)$  date dalle (3) e (4).

Per la I) tenendo conto che nella prima equazione (6) non c'è l'incognita  $y$ , e questa è con l'esponente 1 nella seconda equazione di detto sistema, si ha:

II) *Gli zeri della funzione biduale  $F(\mu)$  data dalla (2) sono tutti e soli i numeri biduali*

$$(7) \quad \mu_j = x_j u + [-g(x_j) : f'(x_j)] v$$

con  $x_j$  zeri della funzione razionale intera  $f(x)$ .

In corrispondenza ad uno zero semplice  $x_j$  della  $f(x)$  si ha uno zero  $\mu_j$  dato dalla (7), per il quale risulta

$$(8) \quad F'(\mu_j) = f'(x_j) u + [f''(x_j) y_j + g'(x_j)] v$$

non nullo nè divisore dello zero.

Ciò perchè la derivata totale della funzione totalmente derivabile  $F(\mu)$  data dalla (1) è data da:

$$(1') \quad F'(\mu) = f'(x) u + [f''(x) y + g'(x)] v,$$

ed  $x_j$  è zero semplice di  $f(x)$  quando, e solo quando, è  $f'(x_j) \neq 0$ . Se  $x_j$  è uno zero doppio di  $f(x)$ , cioè se è  $f'(x_j) = 0$  ed  $f''(x_j) \neq 0$ , il coefficiente di  $v$  nella (7) risulta indeterminato o  $\infty$ , secondo che  $x_j$  è pure zero di  $g(x)$  o non lo è.

Sicchè:

III) *In corrispondenza ad uno zero doppio  $x_j$  della  $f(x)$  si hanno gli zeri della  $F(\mu)$  dati da:*

$$(9) \quad \bar{\mu} = x_j u + yv$$

con  $y$  finito qualunque, o  $\infty$ , secondo  $x_j$  è o non è pure zero di  $g(x)$ . Per un tale zero  $\bar{\mu}$  risulta  $F'(\bar{\mu}) = [f''(x_j) y + g'(x_j)] v$ .

Supponiamo ora che  $x_j$  sia zero triplo di  $f(x)$ . Sarà

$$f'(x_j) = 0, \quad f''(x_j) = 0, \quad f'''(x_j) \neq 0,$$

anche in questo caso il coefficiente di  $v$  nella (7) risulta indeterminato o  $\infty$ , secondo che  $x_j$  è pure zero di  $g(x)$ , o non lo è.

In corrispondenza si hanno anche in questo caso gli zeri del tipo (9).

Solo che per un tale zero  $\bar{\mu}$  risulta  $F'(\bar{\mu}) = g'(x) v$ . Analoga osservazione si fa per  $y_j$  zero multiplo di  $f(x)$  di molteplicità  $> 2$ . Si ha perciò:

IV) *In corrispondenza ad un zero triplo, o quadruplo, ecc.  $x_j$  di  $f(x)$  si hanno che gli zeri della  $F(\mu)$  dati da  $\bar{\mu} = x_j u + yv$  con  $y$  finito qualunque, o  $\infty$ , secondo che  $x_j$  è, o non è, pure zero di  $g(x)$ . Per un tale zero  $\bar{\mu}$  risulta  $F'(\bar{\mu}) = g'(x) v$ .*

Dal risultato ottenuto si ricava che:

V) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione razionale intera  $F(\mu)$  della variabile biduale  $\mu = xu + yv$  non ammetta zeri con  $x = \infty$ , è che ogni eventuale zero multiplo della  $f(x)$  sia anche uno zero della  $g(x)$ .*

2. Se la  $F(\mu)$  è a coefficienti complessi cioè multipli del modulo  $u$ , ciò che avviene quando e solo quando nelle (5) sono nulli tutti i coefficienti  $b_j$ , la  $g(x)$  data dalla (4) risulta identicamente nulla, e quindi la condizione della V) è soddisfatta, si ha perciò:

VI) *Ogni funzione razionale intera biduale  $F(\mu)$  a coefficienti complessi ammette solo zeri  $\mu = xu + yv$  con  $x$  e  $y$  finiti.*

Si osservi ora che se la  $g(x)$  è del tipo

$$(10) \quad g(x) = (hx + k) f'(x)$$

ogni eventuale zero multiplo di  $f(x)$  risulta anche zero di  $g(x)$ , sicchè si ha:

VII) *Ogni funzione razionale intera biduale  $F(\mu)$  del tipo:*

$$(11) \quad F(\mu) = f(x) u + f'(x) (y + hx + k) v$$

con  $f(x)$  funzione intera della variabile complessa  $x$ , ed  $h, k$  costanti qualunque ammette solo zeri  $\mu = xu + yv$  con  $x$  ed  $y$  finiti.

NOTA. — Nel caso  $n = 2$  per le posizioni (3) e (4), la (10) ci dà:

$$b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = (hx + k)(2c_0 x + c_1) = 2hc_0 x^2 + (hc_1 + 2kc_0)x + kc_1$$

Dovendo questa condizione essere identicamente soddisfatta si hanno le condizioni:

$$b_0 = 2hc_0$$

$$b_1 = hc_1 + 2kc_0$$

$$b_2 = kc_1$$

Nel caso che  $a_0$  sia il modulo  $u$ , cioè nel caso  $c_0 = 1$ ,  $b_0 = 0$ , per essere soddisfatta la prima deve essere  $h = 0$ . Le altre due relazioni ci danno, di conseguenza:

$$b_1 = 2kc_0 = 2k, \quad b_2 = kc_1.$$

Eliminando  $k$  fra queste due relazioni si ha la condizione:

$$b_2 = \frac{1}{2} c_1 \quad \text{cioè:}$$

$$(*) \quad b_1 (-c_1 : 2) + b_2 = 0$$

In un altro lavoro in corso di stampa è dimostrato che la condizione (\*), quando non è soddisfatta, porta che l'equazione

$$(**) \quad \mu^2 + a_1 \mu + a_2 = 0$$

non solo non ammette soluzioni finite, ma nemmeno si può mettere sotto la forma:

$$(***) \quad (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) = 0.$$

Sicchè si ha:

La condizione (10) nel caso  $n = 2$ ,  $a_0 = u$ , equivale alla condizione (\*), anche è la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione quadratica (\*\*) ammetta solo radici finite (o che si possa mettere nella forma (\*\*\*)).

3. Si noti che per  $h = k = 0$  la  $g(x)$  data dalla (10) risulta identicamente nulla, cioè si ha il caso particolare in cui i coefficienti della  $F(\mu)$  sono numeri complessi e la proposizione VII) ci dà la VI). La  $F(\mu)$  in tale caso è del tipo

$$(12) \quad F(\mu) = f(x)u + f'(x)yv$$

Cioè è una funzione biduale *semplice*, cioè le funzioni a coefficienti di  $u$  e  $v$  nella forma esplicita della  $F(\mu)$  dipendono, non da due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$ , ma dalla sola funzione  $f(x)$  a coefficiente del modulo  $u$ . (La definizione generale di *funzione semplice* totalmente derivabile di una variabile supercomplessa è già introdotta nel Cap. Quarto della Parte Prima delle Lezioni di Geometria Superiore, Vol. IX, dove sono trattate le funzioni periodiche ed ellittiche di una variabile supercomplessa).

Ora la (11) dà una funzione  $F(\mu)$  in cui la funzione a coefficiente dell'unità  $v$ , oltre a dipendere dalla funzione  $f(x)$  a coefficiente del modulo  $u$ , dipende pure dalle costanti  $h$  e  $k$ . Una tale funzione biduale la diremo *semisemplice*, essendo un tipo di funzione intermedia fra la fun-



zione biduale (totalmente derivabile) del tipo *generale* (1) e la funzione biduale del tipo semplice (12). La proposizione VII) ci dà allora che:

VIII) Ogni equazione algebrica biduale semisemplice di grado  $n$

$$(13) \quad F(\mu) = f(x)u + f'(x)(y + hx + k)v = 0$$

*nell'incognita biduale  $xu + yv$  ammette solo radici finite (cioè con i numeri complessi  $x$  ed  $y$  finiti).*

Si osservi ora che le successive derivate del primo membro della (13) sono:

$$\begin{aligned} F'(\mu) &= f'(x)u + [f''(x)(y + hx + k) + hf'(x)]v \\ F''(\mu) &= f''(x)u + [f'''(x)(y + hx + k) + 2hf''(x)]v \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d^s F}{d\mu^s} &= \frac{d^s f}{dx^s} u + \left[ \frac{d^{s+1}}{dx^{s+1}} (y + hx + k) + s \frac{d^s f}{dx^s} h \right] v. \end{aligned}$$

Ne segue che se  $x_1$  è una radice semplice di  $f(x) = 0$ , in corrispondenza si ha la radice della (13)

$$(14) \quad \mu_1 = x_1 u + \frac{hx_1 + k}{-f'(x_1)} v,$$

radice che risulta semplice per la (13), perchè, essendo  $f'(x_1) \neq 0$ , il valore biduale assunto da  $F'(\mu)$  per  $x = x_1$  ha per coefficiente di  $u$   $f'(x_1)$  e quindi tale valore biduale e non nullo nè divisore dello zero.

Se  $x_1$  è una radice doppia di  $f(x) \neq 0$ , cioè se è:

$$f(x_1) = 0, \quad f'(x_1) = 0, \quad f''(x_1) \neq 0,$$

gl'infiniti numeri biduali, costituenti una catena, del tipo  $\bar{\mu} = x_1 u + yv$  sono tutti radici della (13), e per tale radice  $\bar{\mu}$  si ha:

$$F'(\bar{\mu}) = f''(x_1)(y + hx_1 + k)v,$$

sicchè detta derivata si annulla per  $\bar{\mu} = \bar{\mu}$  quando e solo quando è  $y = -hx_1 - k$ . Per ogni altro valore di  $y$  il valore assunto da  $F'(\bar{\mu})$  è un divisore dello zero e la radice  $\bar{\mu}$  risulta bisemplice, mentre la particolare radice:

$$(15) \quad x_1 u - [(hx_1 + k) : f''(x_1)]v$$

risulta una radice doppia, perchè, mentre per tale valore si annulla  $F'(\mu)$ , la derivata seconda  $F''(\mu)$  assume un valore non nullo nè divisore dello zero, dato che risulta con il coefficiente del modulo  $u$  dato da  $f''(x_1) \neq 0$ .

Se  $x_1$  è radice tripla di  $f(x) = 0$ . Tutti i numeri biduali  $\bar{\mu}$  della sudetta catena risultano pure radici, ma in questo caso, essendo nulli i valori assunti per  $x = x_1$  della derivata prima e seconda di  $f(x)$ , ma non nullo quello assunto dalla derivata terza, risulta che per  $\mu = \bar{\mu}$  si annullano  $F(\mu)$  ed  $F'(\bar{\mu})$  invece si ha  $F''(\bar{\mu}) = f'''(x_1)(y + hx_1 + k)v$ , e questo valore è divisore dello zero per  $y$  generico, e nullo per  $y = -hx_1 - k$ . In questo caso risulta quindi  $\bar{\mu}$  radice bidoppia esclusa la radice  $x_1 u + (-hx_1 - k)v$  che risulta tripla. Proseguendo si ha in generale:

IX) Per ogni radice multipla  $x_1$  di  $f(x) = 0$  si hanno infinite radici dell'equazione algebrica biduale semisemplice:

$$F(\mu) = f(x)u + f'(x)(y + hx + k)v = 0$$

costituenti la catena di numeri biduali  $x_1 u + yv$ . Fra queste radici ve n'è una sola  $s$ -pla, se è  $s$  la molteplicità di  $x_1$  per la  $f(x) = 0$ ; tutte le altre sono bi  $(s-1)$ -ple.

Sicchè: ogni radice doppia appartiene ad una catena di cui ogni altro numero biduale è radice bisemplice; ogni radice tripla appartiene ad una catena di cui ogni altro numero biduale è radice bidoppia, ecc.

Si osservi esplicitamente: per  $s=2$  la radice doppia della catena è data dalla (14): per  $s=3$  la radice tripla della catena è data dalla (15). In generale: radice  $s$ -pla della catena è data da:

$$(16) \quad x_1 u - \left[ (hx_1 + k) : \frac{d^{s-1}f}{dx^{s-1}} \right] v.$$

NOTA. — Nei seguenti n° 4 e 5 dimostreremo due proprietà relative alle funzioni totalmente derivabili, semisemplici, della variabile biduale  $y = xu + yv$ .

4. Consideriamo due funzioni  $F(\mu)$  e  $L(\mu)$ , della variabile biduale  $\mu$  totalmente derivabili, semisemplici, del tipo

$$(15) \quad F(\mu) = f(x)u + f'(x)(y + hx + k)v$$

$$(16) \quad L(\mu) = \hat{f}(x)u = f'(x)(y + px + q)v$$

con  $h, k, p, q$  numeri complessi costanti,  $f(x)$  funzione olomorfa della variabile complessa  $x$  definita in un campo del piano di GAUSS. La funzione somma delle due funzioni, è data da:

$$(17) \quad F(\mu) + L(\mu) = 2f(x)u + f'(x)(2y + hx + px + k + q)v$$

$$= 2f(x)u + 2f'(x)\left(y + \frac{h+p}{2}x + \frac{k+q}{2}\right)v$$

e quindi detta funzione somma è pure una funzione totalmente derivabile semisemplice.

Se  $a$  è un numero complesso la funzione prodotto di  $a$  per  $F(\mu)$  è data da:

$$(18) \quad aF(\mu) = af(x)u + (af'(x)(y + hx + k) + v$$

e quindi anche questa funzione, totalmente derivabile, risulta semisemplice. Ne segue che anche ogni funzione  $aF(\mu) + bL(\mu)$  con  $F(\mu)$  ed  $L(\mu)$  date dalle (15) e (16) risulta totalmente derivabile e semisemplice, con  $a$  e  $b$  complessi qualunque.

Consideriamo ora l'inversa della funzione  $F(\mu)$  data da:

$$(19) \quad F(\mu)^{-1} = f(x)^{-1}u + f'(x)(y + hx + k)f(x)^{-2}v$$

e quindi anche detta funzione inversa risulta semisemplice perchè  $-f'(x)f(x)^{-2}$  è la funzione derivata della  $f(x)^{-1}$ .

Consideriamo, infine, il prodotto delle due funzioni semisemplici  $F(\mu)$  ed  $L(\mu)$ , dato da

$$(20) \quad F(\mu)L(\mu) = f(x)^2u + f(x)f'(x)(2y + hx + px + k + q)v \\ = f(x)^2u + 2f(x)f'(x)\left(\frac{h+p}{2}x + \frac{k+q}{2}\right)v,$$

e quindi detto prodotto è pure una funzione semisemplice perchè  $2f(x)f'(x)$  è la derivata di  $f(x)^2$ .

Intanto abbiamo che:

*Ogni operazione razionale a coefficienti complessi applicata a funzioni totalmente derivabili, semisemplici, del sistema  $\infty^2$  determinato dalla funzione olomorfa di variabile complessa  $f(x)$ , dato dalla (15), al variare dei due numeri complessi  $h$  e  $k$ , risulta pure una funzione totalmente derivabile semisemplice, appartenente al sistema  $\infty^2$  di funzioni totalmente derivabili semisemplici determinato dalla funzione olomorfa della variabile complessa  $x$  che si ottiene applicando la stessa operazione razionale alla  $f(x)$ .*

5. Eseguiamo ora il prodotto di due funzioni  $F(\mu)$  e  $M(\mu)$  appartenenti a due sistemi diversi, determinati dalle due funzioni olomorfe di variabili complessa  $f(x)$  e  $m(x)$ , date, perciò, da:

$$(21) \quad F(\mu) = f(x)u + f'(x)(y + hx + k)v$$

$$(22) \quad M(\mu) = m(x)u + m'(x)(y + px + q)v.$$

$$F(\mu)M(\mu)=f(x)m(x)u+[f(x)m'(x)(y+px+q)+f'(x)m(x)(y+hx+k)]v$$

Nel caso che sia  $h=p$ ,  $k=q$  si ha

$$(23) \quad F(\mu)M(\mu)=f(x)u+[f(x)m'(x)+f'(x)m(x)(y+hx+k)]v$$

e detto prodotto risulta una funzione totalmente derivabile semisemplice appartenente al sistema  $\infty^2$  determinato dalla funzione prodotto  $f(x)m(x)$  e rispondenti alle stesse costanti  $h$  e  $k$  che determinano  $F(\mu)$  ed  $M(\mu)$  nei due sistemi determinati rispettivamente da  $f(x)$  ed  $m(x)$ .

Considerando sempre il caso  $h=p$  e  $k=q$  si ha pure

$$(24) \quad F(\mu) + M(\mu) = [f(x) + m(x)]u + [f'(x) + m'(x)](y + hx)k v$$

e detta risulta pure totalmente derivabile, semisemplice, appartenente al sistema  $\infty^2$  determinato dalla somma  $f(x) + m(x)$  e rispondenti, dentro il sistema, alle stesse costanti  $h$  e  $k$ . Si ha perciò (tenendo conto anche della (18) e della (19)):

*In corrispondenza a due fissati numeri complessi  $h$  e  $k$  l'insieme delle funzioni totalmente derivabili, semisemplici, della variabile biduale  $\mu = xu + zv$ , del tipo:*

$$F(\mu) = f(x)u + f'(x)(y + hx + k)v.$$

*con  $f(x)$  funzione olomorfa qualunque definita in un dato campo del piano di GAUSS, è tale che ogni operazione razionale a coefficienti complessi applicata a funzioni di detto insieme, dà luogo ad una funzione dell'insieme stesso.*

Si osservi, in particolare, che se  $h=k=0$  tali funzioni  $F(\mu)$  sono semplici, e nel caso particolare che  $f(x)$  sia una funzione razionale intera si hanno le funzioni del tipo (11) considerate nella proposizione VII) del n. 2.



STUDIO DI UNA TRASFORMAZIONE CREMONIANA DELL' $S_8$  DEDOTTA  
DA UNA TRASFORMAZIONE QUADRATICA DELL' $S_2$  TRIDUALE AVENTE  
I TRE PUNTI ECCEZIONALI COINCIDENTI

*Nota del dott. Angelo Fadini, presentata dal socio N. Spampinato*

(Adunanza del dì 5 dicembre 1953)

**Sunto.** — Dalle equazioni di una trasformazione quadratica dell' $S_2$  triduale coi tre punti eccezionali coincidenti si deducono quelle di una trasformazione cremoniana dell' $S_8$  complesso; si studia questa trasformazione determinandone gli spazi eccezionali e caratterizzando i due sistemi lineari di ipersuperfici omologhi dei sistemi omaloidici di iperpiani.

Applicando un teorema generale dimostrato dal prof. SPAMPINATO <sup>1)</sup> ho studiato due trasformazioni cremoniane dell' $S_8$  complesso dedotte da due trasformazioni quadratiche dell' $S_2$  triduale, aventi la prima <sup>2)</sup> i tre punti eccezionali distinti e la seconda <sup>3)</sup> due di tali punti coincidenti. In questa nota, a completamento del lavoro, studio la trasformazione cremoniana dell' $S_8$  complesso che si deduce dalla trasformazione quadratica dell' $S_2$  triduale nel caso che i tre punti eccezionali siano tutti coincidenti. Le equazioni triduali di una tale trasformazione quadratica siano:

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} X' = XY - KT^2 \\ Y' = Y^2 \\ T' = YT \end{array} \right.$$

Da queste con ovvie sostituzioni, si ricavano le equazioni di una trasformazione cremoniana  $\Theta$  dell' $S_8$  complesso, nel quale si effettua la prima rappresentazione complessa dell' $S_2$  triduale; esse sono:

---

<sup>1)</sup> N. SPAMPINATO. *Rappresentazioni complesse delle trasformazioni birazionali di un  $S_r$  ipercomplesso.* " *La Ricerca* ", rivista di matematica pura ed applicata, anno III, n. 1. Napoli, 1952.

<sup>2)</sup> A. FADINI. *Studio di una trasformazione cremoniana dell' $S_8$  dedotta da una trasformazione quadratica dell' $S_2$  triduale.* Rend. Acc. di Sc. fis. e mat., serie 4<sup>a</sup>, vol. XIX. Napoli, 1952.

<sup>3)</sup> A. FADINI. *Studio di una trasformazione cremoniana dell' $S_8$  complesso dedotta da una trasformazione quadratica dell' $S_2$  triduale, avente due dei tre punti eccezionali coincidenti.* « *La Ricerca*, » rivista di matematica pura ed applicata, anno IV n. 3-4. Napoli, 1953.

$$[2_1] \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_1 x_4 - K_1 x_7^2 \\ x'_4 = x_4^2 \\ x'_7 = x_4 x_7 \end{array} \right. \quad [2_2] \left\{ \begin{array}{l} x'_2 = x_1 x_5 + x_2 x_4 - 2K_1 x_7 x_8 - K_2 x_7^2 \\ x'_5 = 2x_4 x_5 \\ x'_8 = x_4 x_8 + x_5 x_7 \end{array} \right.$$

$$[2_3] \left\{ \begin{array}{l} x'_3 = x_1 x_6 + x_3 x_4 - 2K_1 x_7 x_9 - K_3 x_7^2 \\ x'_6 = 2x_4 x_6 \\ x'_9 = 2x_4 x_9 + x_6 x_7 \end{array} \right.$$

dove le  $x'_i$  sono le coordinate proiettive omogenee del punto  $P'$  corrente in un certo  $S'_8$  complesso e le  $x_i$  sono le analoghe coordinate del punto  $P$ , corrente in un altro  $S_8$  complesso, distinto o sovrapposto al precedente.

Le formole [2] sono risolubili rispetto alle  $x_i$  e risolte danno le equazioni della trasformazione  $\Theta^{-1}$ , inversa della  $\Theta$ , esse sono:

$$[3_1] \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2x'_1 x'^2_4 + 2K_1 x'_4 x'^2_7 \\ x_4 = 2x'^3_4 \\ x_7 = x'^2_4 x'_7 \end{array} \right.$$

$$[3_2] \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 2x'_2 x'^2_4 - x'_1 x'_4 x'_5 - 3K_1 x'_5 x'^2_7 + 4K_1 x'_4 x'_7 x'_8 + 2K_2 x'_4 x'^2_7 \\ x_5 = x'^2_4 x'_5 \\ x_8 = 2x'^2_4 x'_8 - x'_4 x'_5 x'_7 \end{array} \right.$$

$$[3_3] \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 2x'_3 x'^2_4 - x'_1 x'_4 x'_6 - 3K_1 x'_6 x'^2_7 + 4x'_4 x'_7 x'_9 + 2K_3 x'_4 x'^2_7 \\ x_6 = x'^2_4 x'_6 \\ x_9 = 2x'^2_4 x'_9 - x'_4 x'_6 x'_7 \end{array} \right.$$

La trasformazione  $\Theta$  subordina nel piano  $\alpha_1$  di equazioni:

$$x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = x_8 = x_9 = 0$$

una corrispondenza quadratica  $\Theta_1$  di equazioni [2<sub>1</sub>] con le inverse [3<sub>1</sub>], queste ultime infatti, isolate dal restante sistema, sono anch'esse quadratiche. La stessa trasformazione  $\Theta$  subordina nell' $S_5$   $C$  di equazioni:

$$x_3 = x_6 = x_9 = 0$$

una trasformazione cremoniana di equazioni [2<sub>1</sub>] [2<sub>2</sub>] con le inverse [3<sub>1</sub>] [3<sub>2</sub>] e infine nell' $S_5$   $B$  di equazioni:

$$x_2 = x_5 = x_8 = 0$$

una trasformazione cremoniana di equazioni  $[2_1] [2_3]$  con le inverse  $[3_1] [3_3]$ .

Elementi eccezionali per la trasformazione  $\Theta$  sono: l' $S_5$  A di equazioni:

$$x_1 = x_4 = x_7 = 0$$

e il piano di equazioni:

$$x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 0.$$

Si dimostra facilmente che gli omologhi per la  $\Theta$  dei punti dell'intorno di prim'ordine dei punti di A giacciono nell' $S_5$  A' di equazioni  $x'_1 = x'_4 = x'_7 = 0$ . Infatti se P (0 p<sub>2</sub> p<sub>3</sub> 0 p<sub>5</sub> p<sub>6</sub> 0 p<sub>8</sub> p<sub>9</sub>) è un punto di A e Q (q<sub>i</sub>) è un generico punto dell' $S_8$ , alla retta PQ, per la  $\Theta$ , corrisponde la curva di equazioni parametriche:

$$[4] \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = \lambda(q_1 q_4 - K_1 q_7^2) \\ x'_2 = \lambda(q_1 q_5 + q_2 q_4 - 2K_1 q_7 q_8 - K_2 q_7^2) + (p_5 q_1 + p_2 q_4 - 2K_1 p_8 q_7) \\ x'_3 = \lambda(q_1 q_6 + q_3 q_4 - 2K_1 q_7 q_9 - K_3 q_7^2) + (p_6 q_1 + p_3 q_4 - 2K_1 p_9 q_7) \\ x'_4 = \lambda q_4^2 \\ x'_5 = 2\lambda q_4 q_5 + 2p_5 q_4 \\ x'_6 = 2\lambda q_4 q_6 + 2p_6 q_4 \\ x'_7 = \lambda q_4 q_7 \\ x'_8 = \lambda(q_4 q_8 + q_5 q_7) + p_8 q_4 + p_5 q_7 \\ x'_9 = \lambda(q_4 q_9 + q_6 q_7) + p_9 q_4 + p_6 q_7 \end{array} \right.$$

Da queste equazioni per  $\lambda = 0$  si traggono le coordinate del punto P' omologo del punto P, infinitamente vicino a P nella direzione della retta PQ; ma per  $\lambda = 0$  risultano nulle le  $x'_1$ ,  $x'_4$ ,  $x'_7$ , dunque è dimostrato l'asserto. In particolare se  $P \equiv P_2$  (010000000) anche  $P' \equiv P'_2$  (010000000) e se  $P \equiv P_3$  (001000000) anche  $P' \equiv P'_3$  (001000000).

Invece se  $P \equiv P_5$  (000010000) oppure  $P \equiv P_6$  (000001000) P' giace rispettivamente nel piano P'<sub>2</sub> P'<sub>5</sub> P'<sub>8</sub> o nel piano P'<sub>3</sub> P'<sub>6</sub> P'<sub>9</sub>. Infine se  $P \equiv P_8$  (000000010) oppure  $P \equiv P_9$  (000000001) P' giace rispettivamente sulle rette P'<sub>2</sub> P'<sub>8</sub> o P'<sub>3</sub> P'<sub>9</sub>.

In modo analogo si dimostra che gli omologhi dei punti dell'intorno di prim'ordine dei punti del piano P<sub>1</sub> P<sub>2</sub> P<sub>3</sub> giacciono nel piano P'<sub>1</sub> P'<sub>2</sub> P'<sub>3</sub>. Infatti le coordinate del punto P' omologo del punto P del piano P<sub>1</sub> P<sub>2</sub> P<sub>3</sub> sono date da:

$$[5] \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = p_1 q_4, \quad x'_2 = p_1 q_5 + p_2 q_4; \quad x'_3 = p_1 q_6 + p_3 q_4 \\ x'_4 = x'_5 = x'_6 = x'_7 = x'_8 = x'_9 = 0 \end{array} \right.$$

Dalle 5] si deduce che l'omologo di  $P_*$  appartiene al piano  $P'_1 P'_2 P'_3$ . In particolare se  $P_*$  giace sulla retta  $P_2 P_3$  anche  $P'_*$  giace sulla retta  $P'_2 P'_3$  perchè se  $p_1 = 0$  risulta  $x'_1 = 0$ .

Al sistema omaloidico costituito dagli iperpiani di  $S_8$  la  $\Theta$  fa corrispondere il sistema lineare  $\infty^8$  di iperquadriche di equazione:

$$[6] \quad \begin{aligned} & a_1 x_1 x_4 + a_2 x_1 x_5 + a_3 x_1 x_6 + a_2 x_2 x_4 + a_3 x_3 x_4 + \\ & + a_4 x_4^2 + 2 a_5 x_4 x_5 + 2 a_6 x_4 x_6 + a_7 x_4 x_7 + \\ & + a_8 x_4 x_8 + a_9 x_4 x_9 + a_8 x_5 x_7 + a_9 x_6 x_7 - \\ & - (a_1 K_1 + a_2 K_2 + a_3 K_3) x_4^2 + 2 a_2 K_1 x_7 x_8 - 2 a_3 K_1 x_7 x_9 = 0. \end{aligned}$$

Le proprietà caratteristiche di questo sistema lineare di iperquadriche sono le seguenti:

1). La varietà base del sistema è costituita dall' $S_5$  A di equazioni:

$$x_1 = x_4 = x_7 = 0$$

e dal piano di equazioni:

$$x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 0.$$

2). L'iperpiano tangente alla generica iperquadratica in un punto dell' $S_5$  A ha l'equazione:

$$(a_2 p_5 + a_3 p_6) x_1 + (a_2 p_2 + a_3 p_3 + 2 a_5 p_5 + 2 a_6 p_6 + a_8 p_8 + a_9 p_9) x_4 + \\ + (a_8 p_5 + a_9 p_6 - 2 K_1 a_2 p_8 - 2 K_1 a_3 p_9) x_7 = 0.$$

3). L'iperpiano tangente alla generica iperquadrica in un punto del piano  $P_1 P_2 P_3$  ha l'equazione:

$$(a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3) x_4 + a_2 p_1 x_5 + a_3 p_1 x_6 = 0$$

Il primo di questi iperpiani è indipendente dai coefficienti  $a_1$ ,  $a_4$  ed  $a_7$  e quindi è tangente alle  $\infty^2$  iperquadriche ottenute facendo variare questi coefficienti e mantenendo fissi gli altri sei. Il secondo invece è indipendente dai coefficienti  $a_4$ ,  $a_5$ ,  $a_6$ ,  $a_7$ ,  $a_8$ ,  $a_9$  e quindi è tangente alle  $\infty^5$  iperquadriche ottenute dal sistema al variare di questi coefficienti.

4). L'intersezione del sistema con l' $S_3$  di equazioni:



$$x_1 = x_2 = x_3 = x_6 = x_9 = 0$$

è il sistema lineare di quadriche di equazione:

$$[7] \quad \begin{aligned} & a_4 x_4^2 + 2 a_5 x_4 x_5 + a_7 x_4 x_7 + a_8 (x_4 x_8 + x_5 x_7) + \\ & - (a_1 K_1 + a_2 K_2 + a_3 K_3) x_7^2 - 2 a_2 K_1 x_7 x_8 = 0. \end{aligned}$$

Tale sistema è costituito da tutte le quadriche che passano per la retta  $P_5 P_8$  e godono della proprietà che la proiettività fra le punteggiate  $P_5 P_8$  e  $P_4 P_7$  istituita dai piani tangenti alle quadriche nei punti della retta  $P_5 P_8$  è involutoria.

Infatti l'equazione [7] è soddisfatta dalle coordinate del punto corrente  $P$  sulla retta  $P_5 P_8$  e inoltre il piano tangente  $\pi$  in un punto  $P (0 \lambda 0 \mu)$  di tale retta ha l'equazione:

$$(2 a_5 \lambda + a_8 \mu) x_4 + (a_8 \lambda - 2 a_2 K_1 \mu) x_4 = 0$$

e quindi, indicando con  $\lambda'$  e  $\mu'$  le coordinate non identicamente nulle del punto  $P'$  in cui tale piano taglia la retta  $P_4 P_7$ , la proiettività in cui si corrispondono  $P$  e  $P'$  ha le equazioni:

$$[8] \quad \begin{cases} \lambda' = -a_8 \lambda - 2 a_2 K_1 \mu \\ \mu' = 2 a_5 \lambda + a_8 \mu \end{cases}$$

ed è quindi involutoria.

Queste proprietà caratterizzano il sistema (7); infatti l'equazione della generica quadrica dell' $S_3$  individuato dai punti  $P_4 P_5 P_7 P_8$  è:

$$[9] \quad \sum b_{ij} x_i x_j = 0 \quad (i, j = 4, 5, 7, 8)$$

Imporre la condizione che essa passi per la retta  $P_5 P_8$  equivale a porre:  $b_{55} = b_{88} = b_{58} = 0$ ; mentre la condizione che la proiettività fra le punteggiate  $P_5 P_8$  e  $P_4 P_7$  istituita dai piani tangenti nei punti della retta  $P_5 P_8$  sia involutoria implica che sia  $b_{48} = b_{57}$ . La (9) diventa quindi:

$$\begin{aligned} & b_{44} x_4^2 + 2 b_{45} x_4 x_5 + 2 b_{47} x_4 x_7 + 2 b_{48} (x_4 x_8 + x_5 x_7) + \\ & + b_{77} x_7^2 + 2 b_{78} x_7 x_8 = 0 \end{aligned}$$

che è analoga alla (7).

5). L'intersezione del sistema coll' $S_3$  di equazioni

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_8 = 0$$

è il sistema lineare di quadriche di equazione:

$$a_4 x_4^2 + 2 a_6 x_4 x_6 + a_7 x_4 x_7 + a_9 (x_4 x_9 + x_6 x_7) - \\ - (a_1 K_1 + a_2 K_2 + a_3 K_3) x_7^2 - 2 a_3 K_1 x_7 x_9 = 0.$$

Questo sistema è costituito da tutte le quadriche che possano per la retta  $P_6 P_9$  e godono della proprietà che la proiettività in cui si corrispondono le punteggiate  $P_6 P_9$  e  $P_4 P_7$ , istituita dai piani tangenti nei punti della retta  $P_6 P_9$  sia involutoria.

La dimostrazione è identica a quella precedente col solo scambio degli indici 6 e 9 rispettivamente con 5 ed 8.

6). L'intersezione del sistema con l' $S_5$  C di equazioni:  $x_3 = x_6 = x_9 = 0$  è il sistema lineare di iperquadriche di equazione:

$$a_1 x_1 x_4 + a_2 (x_1 x_5 + x_2 x_4) + a_4 x_4^2 + 2 a_5 x_4 x_5 + a_7 x_4 x_7 + \\ + a_8 (x_4 x_8 + x_5 x_7) - (a_1 K_1 + a_2 K_2 + a_3 K_3) x_7^2 - 2 a_2 K_1 x_7 x_8 = 0$$

Queste iperquadriche contengono la retta  $P_1 P_2$  ed il piano  $P_2 P_5 P_8$ ; gli iperpiani ad esse tangenti nei punti P ( $\lambda \mu$  0000) della retta  $P_1 P_2$  hanno l'equazione:

$$[11] \quad (a_1 \lambda + a_2 \mu) x_4 + a_2 \lambda x_5 = 0$$

e quelli tangenti nei punti P (0  $\lambda$  0  $\mu$  0  $\nu$ ) del piano  $P_2 P_5 P_8$  hanno l'equazione:

$$[12] \quad a_2 \mu x_1 + (a_2 \lambda + 2 a_5 \mu + a_8 \nu) x_4 + (a_8 \mu - 2 a_2 K_1 \nu) x_7 = 0$$

Esse inoltre sono caratterizzate dal fatto che la proiettività intercedente tra il piano  $\alpha = P_2 P_5 P_8$  e la stella di  $S_4$  tangenti, di centro  $\alpha$ , ha le equazioni seguenti:

$$[12'] \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda' = a_2 \mu \\ \mu' = a_2 \lambda + 2 a_5 \mu + a_8 \nu \\ \nu' = a_8 \mu - 2 a_2 K_1 \nu \end{array} \right.$$

Queste proprietà caratterizzano il sistema (10) infatti imporre alla generica iperquadrica dell' $S_5$  di contenere il piano  $P_2 P_5 P_8$  e la retta  $P_1 P_2$ , di avere gli iperpiani tangenti nei punti della retta  $P_1 P_2$  di equazione (11) e quelli tangenti nei punti del piano  $P_2 P_5 P_8$  di equazione (12) equivale ad imporre ai coefficienti  $a_{ij}$  della sua equazione le condizioni:

$$a_{22} = a_{55} = a_{88} = a_{25} = a_{28} = a_{58} = 0$$

$$a_{11} = a_{12} = a_{17} = a_{18} = a_{27} = 0$$

e la sua equazione si riduce quindi alla seguente:

$$[13] \quad \begin{aligned} & 2 a_{14} x_1 x_4 + 2 a_{15} x_1 x_5 + 2 a_{24} x_2 x_4 + a_{44} x_4^2 + \\ & + 2 a_{45} x_4 x_5 + 2 a_{47} x_4 x_7 + 2 a_{48} x_4 x_8 + 2 a_{57} x_5 x_7 + \\ & + a_{77} x_7^2 + 2 a_{78} x_7 x_8 = 0. \end{aligned}$$

L'iperpiano tangente a questa iperquadrica nel punto  $P(0 \lambda 0 \mu 0 \nu)$  ha l'equazione:

$$\begin{aligned} & a_{15} \mu x_1 + (a_{24} \lambda + a_{45} \mu + a_{48} \nu) x_4 + \\ & + (a_{57} \mu + a_{78} \nu) x_7 = 0 \end{aligned}$$

La proiettività che fa corrispondere al punto  $P(0 \lambda 0 \mu 0 \nu)$  questo iperpiano  $\pi$ , indicando con  $\lambda'$ ,  $\mu'$ ,  $\nu'$  le coordinate non nulle di  $\pi$  ha le equazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda' &= a_{15} \mu \\ \mu' &= a_{24} \lambda + a_{45} \mu + a_{48} \nu \\ \nu' &= a_{57} \mu + a_{78} \nu \end{aligned} \right.$$

Confrontando queste equazioni con le (12') si ricavano le ulteriori condizioni:

$$\begin{aligned} a_{15} &= a_{24} & a_{78} &= -2 K_1 a_{24} \\ a_{48} &= a_{57} \end{aligned}$$

e introducendo queste condizioni la (13) si identifica con la (10).

7). Infine l'interserzione del sistema con l' $S_5$  B di equazioni:

$$x_2 = x_5 = x_8 = 0$$

è il sistema delle iperquadriche che contengono la retta  $P_1 P_3$  ed il piano  $P_3 P_6 P_9$ , che hanno gli iperpiani tangenti nel generico punto  $P(\lambda 0 \mu 0 0 0)$  della retta  $P_1 P_3$  di equazione:

$$(a_1 \lambda + a_3 \mu) x_4 + a_3 \lambda x_6 = 0$$

e quelli tangenti nel punto P (0 λ 0 μ ν) del piano β (P<sub>3</sub> P<sub>6</sub> P<sub>9</sub>) di equazione :

$$a_3 \mu x_1 + (a_3 \lambda + 2a_6 \mu + a_9 \nu) x_4 + (a_9 \mu - 2a_3 K_1 \nu) x_7 = 0$$

e che infine sono caratterizzate dalla proprietà che la proiezione fra il piano P<sub>3</sub> P<sub>6</sub> P<sub>9</sub> e la stella di iperpiani tangenti nei punti di questo piano alle iperquadriche abbia le equazioni del tipo :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda' = a_3 \mu \\ \mu' = a_3 \lambda + 2 a_6 \mu + a_9 \nu \\ \nu' = a_9 \mu - 2 a_3 K_1 \nu \end{array} \right.$$

La dimostrazione è identica alla precedente differendone solo per il valore di alcuni indici.

La trasformazione inversa  $\Theta^{-1}$  è del terzo ordine, sicchè essa fa corrispondere al sistema  $\infty^8$  degli iperpiani dell' S<sub>8</sub> un sistema lineare omaloideo di ipersuperficie del 3° ordine, la cui equazione è :

$$\begin{aligned} & 2a_1 x'_1 x'^2_4 - a_2 x'_1 x'_4 x'_5 - a_3 x'_1 x'_4 x'_6 + 2a_2 x'_2 x'^2_4 + 2a_3 x'_3 x'^2_4 + \\ & + 2a_4 x'^3_4 + a_5 x'^2_4 x'_5 + a_6 x'^2_4 x'_6 + a_7 x'^2_4 x'_7 + 2a_8 x'^2_4 x'_8 + \\ [14] \quad & + 2a_9 x'^2_4 x'_9 - a_8 x'_4 x'_5 x'_7 - a_9 x'_4 x'_6 x'_7 + 2(a_1 K_1 + a_2 K_2 + a_3 K_3) x'_4 x'^2_7 + \\ & + 4a_2 K_1 x'_4 x'_7 x'_8 + 4a_3 K_1 x'_4 x'_7 x'_9 - 3a_2 K_1 x'^2_5 x'^2_7 - 3a_3 K_1 x'_6 x'^2_7 = 0. \end{aligned}$$

Le proprietà caratteristiche di questo sistema sono le seguenti :

1) Alla varietà base appartengono l' S<sub>5</sub> A contato due volte, il piano P<sub>1</sub> P<sub>2</sub> P<sub>3</sub> anch' esso contato due volte, ed il punto P<sub>7</sub> (000000100).

2) L' ipercono tangente alla generica iperquadrica del sistema in un punto P (0 p<sub>2</sub> p<sub>3</sub> 0 p<sub>5</sub> p<sub>6</sub> 0 p<sub>8</sub> p<sub>9</sub>) dell' S<sub>5</sub> A ha l' equazione :

$$\begin{aligned} & -(a_2 p_5 + a_3 p_6) x_1 x_4 + 2(2a_2 p_2 + 2a_3 p_3 + a_5 p_5 + a_6 p_6 + 2a_8 p_8 + 2a_9 p_9) x_4^2 + \\ & -(a_8 p_5 + a_9 p_6 - 4a_2 K_1 p_8 - 4a_3 K_1 p_9) x_4 x_7 + 6K_1 (a_2 p_5 + p_3 p_6) x_7^2 = 0 \end{aligned}$$

che è indipendente dai coefficienti a<sub>1</sub> a<sub>4</sub> ed a<sub>7</sub>.

3) L' ipercono tangente in un punto P (λ μ ν 000000) dell' S<sub>2</sub> P<sub>1</sub> P<sub>2</sub> P<sub>3</sub> ha l' equazione :

$$[15] \quad [4(a_1 \lambda + a_2 \mu + a_3 \nu) x_4 - a_2 \lambda x_5 - a_3 \lambda x_6] x_4 = 0$$



esso si spezza quindi in due iperpiani ed è indipendente dai coefficienti  $a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$  ed  $a_9$ .

4) L' iperpiano tangente nel punto  $P_7$  (000000100) ha l' equazione :

$$[16] \quad 2(a_1K_1 + a_2K_2 + a_3K_3)x_4 - 3a_2K_1x_5 - 3a_3K_1x_6 = 0$$

5) Le equazioni della corrispondenza fra i punti dell'  $S_6$  di equazioni  $x_1 = x_7 = 0$  e gli iperpiani polari di tali punti rispetto all' ipersuperficie del sistema sono :

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 2a_1y_4 - a_2y_5 - a_3y_6 \\ \xi_2 &= 2a_2y_4 \\ \xi_3 &= 2a_3y_4 \\ \xi_4 &= 4a_2y_2 + 4a_3y_3 + 6a_4y_4 + 2a_5y_5 + 2a_6y_6 + 4a_8y_8 + 4a_9y_9 \\ \xi_5 &= a_5y_4 \\ \xi_6 &= a_6y_4 \\ \xi_7 &= a_7y_4 - a_8y_5 - a_9y_6 + 4a_2K_1y_8 + 4a_3K_1y_9 \\ \xi_8 &= 2a_8y_4 \\ \xi_9 &= 2a_9y_4 \end{aligned} \right\}$$

Le proprietà elencate caratterizzano il sistema. Infatti l' equazione di una generica ipersuperficie cubica dell'  $S_8$  si compone di  $C'_{9,3} = 165$  termini, i cui coefficienti verranno indicati con  $a_{ijh}$  essendo  $(i j h)$  una permutazione dei nove indici  $1, 2 \dots 9$ .

Perchè l' ipersuperficie contenga l'  $S_5$  A come doppio occorre che siano nulli i coefficienti dei termini nei quali gli indici  $2, 3, 5, 6, 8, 9$  figurano a terzo o secondo grado, che sono 54, quelli nei quali non figurano gli indici  $1, 4$  o  $7$  che sono  $\binom{6}{3} = 20$  e quelli nei quali figurano gli indici  $1, 4$  o  $7$  a primo grado che sono  $3 \binom{6}{2} = 45$ . In totale devono quindi annullarsi 119 coefficienti.

Perchè l'  $S_2 P_1 P_2 P_3$  sia doppio per l' ipersuperficie occorre che siano nulli i nove coefficienti dei termini nei quali figura l' indice  $1$  al terzo o secondo grado, nonchè i coefficienti  $a_{124}, a_{127}, a_{134}, a_{137}$  essendo già nulli, per le condizioni precedenti, gli altri coefficienti nei quali gli indici  $1, 2$  e  $3$  figurano due sole volte. Infine perchè l' ipersuperficie passi per  $P_7$  dev' essere nullo  $a_{777}$ .

Perchè poi l' ipercono tangente alle ipersuperficie del sistema in un punto  $P$  ( $\lambda \mu \nu 000000$ ) dell'  $S_2 P_1 P_2 P_3$  abbia l' equazione del tipo (15) occorre che sia :

$$\begin{aligned} a_{147} &= a_{247} = a_{347} = a_{148} = a_{149} = a_{157} = a_{167} = \\ &= a_{177} = a_{277} = a_{377} = a_{178} = a_{179} = 0 \end{aligned}$$

e perchè l'iperpiano tangente alle ipersuperficie nel punto  $P_7$  abbia l'equazione del tipo (16) occorre che sia :

$$a_{778} = a_{779} = 0.$$

Pertanto l'ipersuperficie cubica dell' $S_8$  che contiene quali doppi l' $S_5$  A ed il piano  $\alpha \equiv P_1 P_2 P_3$ , che passa per  $P_7$ , che ha l'ipercono tangente in un punto di  $\alpha$  di equazioni (15) e l'iperpiano tangente in  $P_7$  di equazione (16) è caratterizzata dall'equazione :

$$\begin{aligned} &a_{144}x_1x_4^2 + a_{145}x_1x_4x_5 + a_{146}x_1x_4x_6 + a_{244}x_2x_4^2 + a_{344}x_3x_4^2 + \\ &+ a_{444}x_4^3 + a_{445}x_4^2x_5 + a_{446}x_4^2x_6 + a_{447}x_4^2x_7 + a_{448}x_4^2x_8 + \\ &+ a_{449}x_4^2x_9 + a_{457}x_4x_5x_7 + a_{467}x_4x_6x_7 + a_{478}x_4x_7x_8 + a_{479}x_4x_7x_9 + \\ &+ a_{477}x_4x_7^2 + a_{577}x_5x_7^2 + a_{677}x_6x_7^2 = 0. \end{aligned}$$

Quest'equazione contiene gli stessi termini della (14), ne differisce solo per avere tutti i coefficienti indipendenti, mentre alcuni coefficienti della (14) sono legati da relazioni lineari.

Consideriamo ora l'iperpiano polare del punto  $Y$  ( $0 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 0 y_8 y_9$ ) rispetto alla generica ipersuperficie del sistema, la sua equazione è :

$$\begin{aligned} &(a_{144}y_4 + a_{145}y_5 + a_{146}y_6)x_1 + a_{244}y_4x_2 + a_{344}y_4x_3 + \\ &+ (2a_{244}y_2 + 2a_{344}y_3 + 3a_{444}y_4 + 2a_{445}y_5 + 2a_{446}y_6 + 2a_{448}y_8 + \\ &+ 2a_{449}y_9)x_4 + a_{445}y_4x_5 + a_{446}y_4x_6 + (a_{447}x_4 + a_{457}y_5 + a_{467}y_6 + \\ &+ a_{478}y_8 + a_{479}y_9)x_7 + a_{448}y_4x_8 + a_{449}y_4x_9 = 0. \end{aligned}$$

Indicando con  $\xi_i$  le coordinate di questo iperpiano cioè i coefficienti della sua equazione si ha :

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= a_{144}y_4 + a_{145}y_5 + a_{146}y_6 \\ \xi_2 &= a_{244}y_4 \\ \xi_3 &= a_{344}y_4 \\ \xi_4 &= 2a_{244}y_2 + 2a_{344}y_3 + 3a_{444}y_4 + 2a_{445}y_5 + 2a_{446}y_6 + 2a_{448}y_8 + 2a_{449}y_9 \\ \xi_5 &= a_{445}y_4 \\ \xi_6 &= a_{446}y_4 \\ \xi_7 &= a_{447}y_4 + a_{457}y_5 + a_{467}y_6 + a_{478}y_8 + a_{479}y_9 \\ \xi_8 &= a_{448}y_4 \\ \xi_9 &= a_{449}y_4 \end{aligned} \right.$$

Affinchè queste equazioni siano dello stesso tipo delle (17) occorre e basta che si abbia:

$$a_{244} = -2 a_{145}$$

$$a_{344} = -2 a_{146}$$

$$a_{448} = -2 a_{457}$$

$$a_{449} = -2 a_{467}$$

$$a_{478} = -4 K_1 a_{145}$$

$$a_{419} = -4 K_1 a_{146}$$

In modo analogo si giustificano le altre relazioni fra i coefficienti della (14). Per brevità ometto tale giustificazione che del resto riesce priva d'interesse.

Resta così dimostrato che le proprietà elencate ai n. 1, 2, 3, 4, 5 caratterizzano il sistema lineare omaloidico di ipersuperficie cubiche del 3° ordine di equazione (14).

*Processo verbale dell'adunanza del dì 3 gennaio 1953.*

Assistono all'adunanza, presieduta dal presidente Pierantoni, i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo (segretario), Galli, Imbò, Miranda, Nobile, Salfi, Scherillo, Spampinato, Tolotti, Zappa ed i corrispondenti Colucci, Covello, Montalenti.

Il segretario legge il processo verbale della tornata 6 dicembre, che è approvato. Indi dà notizia delle principali decisioni adottate nella riunione 18 dicembre del Consiglio Generale della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti, e soprattutto di quelle riflettenti il bilancio consuntivo 1952 e preventivo 1953.

La Commissione Galli, Tolotti e Carrelli riferisce sulla nota del dott. Cesare MONTUORI, *Sul calcolo di progetto delle sezioni in cemento armato precompresso*, proponendone la stampa nel Rendiconto. Dello stesso avviso è la Commissione Galli, Tolotti e Iacopetti nei riguardi della nota del dr. Ettore MINERVINI dal titolo: *Apparecchio elettrico per la determinazione delle caratteristiche della sollecitazione nei telai iperstatici*. Con due distinte votazioni l'Accademia accoglie alla unanimità le proposte predette.

Si stabilisce quindi di accogliere la proposta avanzata dalla Sezione di Scienze Matematiche relativamente al bando di concorso al premio accademico di L. 50.000 per il biennio 1953-54, fissando come tema del concorso stesso il seguente: « *Contributo allo studio dei gruppi o delle algebre dal punto di vista della teoria dei reticoli* » e come data di scadenza per la presentazione di lavori il 30 ottobre 1954.

*Processo verbale dell'adunanza del dì 7 febbraio 1953.*

Assistono all'adunanza i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo, Diamare, Imbò, Miranda, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Tolotti, Zappa ed i corrispondenti Covello ed Orrù.

Presiede il presidente Pierantoni, segretario il socio D' Erasmo.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 3 gennaio, che è approvato. Indi comunica che nella seduta plenaria del 31 gennaio il presidente generale della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti ha proceduto, secondo le norme del regolamento, all'apertura della busta suggellata contrassegnata dal motto *Campania felix*, che accompagnava la memoria dattiloscritta giudicata meritevole del premio di L. 50.000 sul tema *Contributo alla mineralogia vulcanica della Campania*, e che è risultato autore della memoria premiata il prof. Antonio PARASCANDOLA. Presenta quindi il volume del Rendiconto accademico dell'anno 1952, del quale è stata recentemente ultimata la stampa.



Il socio Imbò presenta, per l'inserzione nel Rendiconto, le quattro note seguenti: 1) Luigi ACCARDI, *Misure di campo elettrico atmosferico eseguite in occasione dell'eclisse parziale di sole del 25-2-1952*; 2) Lorenzo CASERTANO, *Il grado di polarizzazione della luce del cielo misurato all'Osservatorio vesuviano durante l'eclisse solare del 25-2-1952*; 3) Lorenzo CASERTANO, *Misure di luminosità del cielo effettuate all'Osservatorio vesuviano durante l'eclisse solare del 25-2-1952*; 4) Pio VITTOZZI, *Radiazione solare diretta, globale e diffusa a Napoli in occasione dell'eclisse solare del 25-2-1952*. — Viene incaricata di riferire su di esse la Commissione costituita dai soci Imbò, Carrelli e D' Erasmo.

Il socio Tolotti presenta una nota del dott. Luigi SALVADORI *Sulla stabilità dei moti merostatici di particolari sistemi anolonomi*. Il Presidente nomina la Commissione Tolotti, Nobile e Miranda, perchè riferisca su questo lavoro nella prossima adunanza.

Il socio Scherillo presenta, nella sua qualità di tesoriere, il conto degli introiti e degli esiti del decorso anno 1952. L'Accademia nomina i due revisori in persona dei soci Salfi e Zappa, incaricandoli di riferire sul bilancio in una prossima adunanza.

*Processo verbale dell'adunanza del dì 7 marzo 1953.*

Assistono all'adunanza, presieduta dal Presidente Pierantoni, i soci ordinari residenti Bakunin, Colamónico, De Lorenzo, D' Erasmo, Diamare, Galli, Imbò, Miranda, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato, Tolotti, Zappa ed il corrispondente Orrù.

Scusano l'assenza il prof. Panizzi ed il prof. Milone, che ha ripetuto i suoi ringraziamenti per la recente nomina a socio ordinario non residente.

Il socio Imbò, tanto in nome proprio che dei colleghi Carrelli e D' Erasmo, legge la relazione favorevole alla inserzione nel Rendiconto delle quattro note seguenti presentate nella precedente adunanza: 1) Luigi ACCARDI, *Misure di campo elettrico atmosferico eseguite in occasione dell'eclisse parziale di sole del 25 febbraio 1952*; 2) Lorenzo CASERTANO, *Il grado di polarizzazione della luce del cielo misurato all'Osservatorio vesuviano durante l'eclisse solare del 25 febr. 1952*; 3) Lorenzo CASERTANO, *Misure di luminosità del cielo effettuate all'Osservatorio Vesuviano durante l'eclisse solare del 25 febr. 1952*; 4) Pio VITTOZZI, *Radiazione solare diretta, globale e diffusa a Napoli in occasione dell'eclisse solare del 25 febr. 1952*. — L'Accademia approva all'unanimità.

La Commissione Tolotti, Nobile e Miranda riferisce sulla nota del dott. Luigi SALVADORI *Sulla stabilità dei moti merostatici di particolari sistemi anolonomi*, proponendone la stampa nel Rendiconto. — A voti unanimi l'Accademia approva.

Il socio DIAMARE presenta per gli Atti dell' Accademia una sua memoria del titolo: *Ricerche istofisiologiche e morfologiche e annotazioni storiche e critiche* e ne riferisce. — L' Accademia ne approva l' accoglimento per la stampa, riservandosi di decidere il contributo destinato alle illustrazioni quando ne avrà conosciuto l' importo.

Il socio SPAMPINATO presenta per il Rendiconto una sua nota dal titolo: *Varietà determinata da una coppia ordinata di ipersuperficie del  $S_r$  complesso* e ne riferisce.

Il presidente PIERANTONI presenta per il Rendiconto una sua nota dal titolo: *Osservazioni e considerazioni su recenti studi di simbiologia sperimentale* e ne riferisce.

Il socio Galli presenta una nota del dott. Tullio RENZULLI dal titolo: *Le sollecitazioni di origine termica in un ponte Maillart*. Viene incaricata di riferire, in una prossima seduta, la Commissione formata dai soci Galli, Miranda e Tolotti.

Infine il socio Salfi legge, anche in nome del collega Zappa, la relazione dei revisori del bilancio consuntivo 1952, di cui propone l' approvazione. — L' Accademia approva alla unanimità.

*Processo verbale dell' adunanza del dì 4 aprile 1953.*

Sono presenti i soci ordinari Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo, Diamare, Galli, Giordani, Malquori, Pierantoni, Salfi, Scherillo, ed i corrispondenti Colucci e Scorza Dragoni. Presiede il presidente Pierantoni, segretario il socio D' Erasmo.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza del dì 7 marzo, che è approvato. Indi presenta l' Annuario 1953 della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti, nel quale è stato per la prima volta possibile inserire un elenco, ricco di oltre 500 numeri, delle pubblicazioni periodiche pervenute al sodalizio, in dono o in cambio, nello scorso anno 1952.

L' Accademia stabilisce il cambio del Rendiconto accademico con la Société des Sciences naturelles de Tunisie a cominciare dall' anno 1952.

La Commissione Galli, Miranda e Tolotti riferisce sulla nota del dott. Tullio RENZULLI dal titolo *Le sollecitazioni di origine termica in un ponte Maillart*, proponendone l' inserzione nel Rendiconto. — L' Accademia unanime approva.

Il socio DE LORENZO presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo *Scienza d' Occidente e Sapienza d' Oriente*, e ne discorre.

Il socio Galli presenta una nota del prof. Vincenzo FRANCIOSI, *Considerazioni sugli archi tipo Boussiron-La Vallette*. Il presidente nomina la Commissione costituita dai soci Galli, Tolotti e Miranda, con l' incarico di riferire su detto lavoro in una prossima adunanza.

*Processo verbale dell'adunanza del dì 2 maggio 1953.*

Assistono all'adunanza, presieduta dal presidente Pierantoni, i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo (segretario), Diamare, Imbò, Scherillo, Tolotti, Zappa ed i corrispondenti Beretta ed Orrù.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 4 aprile, che è approvato.

La Commissione Galli, Tolotti e Miranda riferisce sulla nota del prof. Vincenzo FRANCIOSI dal titolo *Considerazioni sugli archi tipo Boussiron-La Vallette*, concludendo con la proposta di inserirla nel Rendiconto. — L'Accademia approva all'unanimità.

Il segretario presenta, a nome del socio Colacevich che scusa l'assenza, una nota del prof. Eugenio GUERRIERI dal titolo: *Abbondanza e deficienza di pioggia dal 1949 al 1951. Temperature straordinarie nell'estate del 1952.* — Il presidente dà incarico di riferire su questo lavoro alla Commissione composta dai soci Colacevich, Colamonico e Imbò.

Il socio D' Erasmo presenta, per il Rendiconto, una nota del prof. Antonio LAZZARI, *Primi risultati dell'indagine geofisica con il metodo sismico a riflessione nella Piana di Catania.* — Il presidente nomina la Commissione D' Erasmo, De Lorenzo e Imbò, perchè riferisca su detta nota nella prossima adunanza.

*Processo verbale dell'adunanza del dì 6 giugno 1953.*

Sono presenti i soci ordinari residenti Bakunin, Carrelli, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo, Diamare, Galli, Giordani, Imbò, Miranda, Salfi, Scherillo, Zappa, ed i soci corrispondenti Beretta, Covello e Montalenti. Presiede il vice-presidente Colamonico, segretario il socio D' Erasmo.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 2 maggio, che è approvato. Indi comunica le principali deliberazioni prese dal Consiglio Generale della Società nella sua adunanza del dì 7 maggio, fra le quali è compresa l'assegnazione di un fondo straordinario di L. 600.000 all'Accademia di Scienze fisiche e matematiche sul contributo concesso dal Ministero della P. I. per l'anno finanziario 1952-53.

Tenuto conto della somma disponibile, sul bilancio 1953, per la stampa del Rendiconto, l'Accademia stabilisce, — su proposta del socio Miranda e dopo discussione alla quale partecipano i soci Giordani, Colamonico e D' Erasmo — di portare da 24 a 40 il numero delle pagine di cui ciascun socio potrà annualmente disporre, a cominciare dal corrente 1953, per lavori propri o di estranei, nel Rendiconto accademico. Vengono, invece, mantenute ferme le altre limitazioni in vigore riguardanti il numero degli estratti, la copertina e le illustrazioni.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio vengono segnalati il volume *Saline adriatiche* e l'opuscolo *Sul XVII Congresso internazionale di Geografia*, offerti dal socio Colamonico, nonchè una nota su recenti ricerche riflettenti *il bradisismo del Serapeo di Pozzuoli*, donata dal socio D' Erasmo.

La Commissione Colacevich, Colamonico e Imbò riferisce sulla nota del prof. Eugenio GUERRIERI, *Abbondanza e deficienza di pioggia dal 1949 al 1951. Temperature straordinarie nell'estate del 1952*, concludendo con la proposta d'inserzione nel Rendiconto. L'Accademia unanime approva.

Viene pure accolta all'unanimità la proposta di stampa, nel medesimo periodico, della nota del dott. Antonio LAZZARI, *Primi risultati dell'indagine geofisica con il metodo sismico a riflessione nella Piana di Catania*, secondo il parere espresso dalla Commissione D' Erasmo, De Lorenzo e Imbò.

Il socio Galli presenta una nota del prof. Franco MAZZARELLA dal titolo *Estensione della analogia di Mohr alle travi sottili caricate assialmente*. Il presidente nomina la Commissione costituita dai soci Galli, Miranda e Tolotti, con l'incarico di riferire su questo lavoro nella prossima tornata.

Il socio Giordani presenta due note, destinate all'inserzione nel Rendiconto: la prima, dei dottori JANNELLI L., GIORDANO-ORSINI P. e DANIELE G., ha per titolo *Sul momento elettrico dell'acido paraminosalicilico*; l'altra, dei dottori NICOLAUS R. A. e GIORDANO-ORSINI P., riguarda *Ricerche nel campo degli indicatori azoici*. Vengono incaricate di riferire su questi lavori le Commissioni composte rispettivamente dai soci Giordani, Bakunin e Beretta e dai soci Giordani, Bakunin e Panizzi.

Il socio Zappa presenta, a nome del socio Spampinato, che scusa l'assenza, per la stampa del medesimo periodico, la nota I di Nicolò SPAMPINATO su *Le falde t-dimensionali analitiche, algebriche ed unirazionali di un  $S_r$  supercomplesso*.

Il socio DE LORENZO presenta una sua nota dal titolo: *Kant e la Geografia fisica*.

#### *Processo verbale dell'adunanza del dì 7 novembre 1953.*

Assistono all'adunanza, presieduta dal presidente Pierantoni, i soci ordinari Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo (segretario), Diamare, Galli, Giordani, Malquori, Nobile, Salfi, Scherillo, Tolotti, ed il socio corrispondente Panizzi.

Il segretario partecipa anzitutto, con profondo rimpianto, l'immaturo scomparsa del socio corrispondente Attilio Colacevich, avvenuta lo scorso 24 agosto, e dopo averne brevemente ricordate la brillante carriera — percorsa prima presso l'Osservatorio astronomico di Arcetri e poi presso quello di Capodimonte — e la vasta e molteplice attività scientifica,



attestata da una ottantina di pubblicazioni che spaziando fra le ricerche di astronomia e statistica stellare e quelle di ottica applicata sono prevalentemente rivolte ai campi della più moderna astrofisica, annunzia che una degna commemorazione di Lui è stata preparata, per il Rendiconto accademico, dal prof. Tito Nicolini. Ai funerali del compianto consocio, svoltisi in Firenze, l'Accademia fu rappresentata dal collega prof. Carnera.

Il segretario successivamente comunica:

1) la lettera del prof. Gaston Julia, membro de l'Institut de France, che a nome del Comitato organizzatore della celebrazione del centenario della nascita di Henri Poincaré invita l'Accademia a far parte del Comitato d'Onore e a designare un proprio delegato a tale manifestazione, che avrà luogo a Parigi e a Nancy nel maggio 1954;

2) l'invito del Comitato organizzatore del Congresso Internazionale dei matematici, che avrà luogo ad Amsterdam dal 2 al 9 sett. 1954, a parteciparvi designando i propri delegati;

3) la circolare dell'Ente autonomo Mostra d'Oltremare di Napoli, relativa al Congresso Internazionale di Etnografia e Folklore del Mare, che sotto la presidenza del prof. Raffaele Corso sarà tenuto nella nostra città nell'estate 1954;

4) la Ministeriale 11 luglio 1953, che comunica il Decreto Presidenziale 11-3-1953 relativo all'avvenuta approvazione della nomina del socio D'Erasmo a segretario dell'Accademia per il triennio 1953-1955;

5) la comunicazione 15 ottobre 1953 della Presidenza del Consiglio dei Ministri, Ufficio del Libro e della Carta, relativa all'assegnazione di un contributo di L. 300.000 per la stampa del Rendiconto dell'Accademia.

Si stabilisce quindi il calendario delle tornate ordinarie per l'anno 1954, che risulta il seguente: Gennaio 2, Febbraio 6, Marzo 6, Aprile 3, Maggio 15, Giugno 5, Novembre 6, Dicembre 4.

Passando alle comunicazioni scientifiche, il Segretario informa di avere accolto durante le ferie estive, per la stampa nel Rendiconto, una nota del socio DE LORENZO sopra *I vulcani della luna*, pervenuta all'Accademia il dì 24 agosto 1953.

Presenta quindi la memoria del socio DIAMARE, *Ricerche istofisiologiche e morfologiche e annotazioni storiche e critiche*, di cui è stata recentemente ultimata la stampa nel volume in corso degli Atti.

Il socio Nobile ricorda l'opera scientifica e didattica del compianto consocio Colacevich con le seguenti parole:

« Il prof. Attilio Colacevich, da due anni ospite della nostra città come direttore dell'Osservatorio astronomico di Capodimonte e nostro consocio, ha lasciato la vita improvvisamente, il 24 agosto ultimo, mentre tutti potevamo sperare superata una grave crisi da lui attraversata e mentre egli,

pieno di ardore e di attività, si era di nuovo rivolto ai suoi studi e si era dedicato allo svolgimento di un complesso programma di costruzioni strumentali e di ricerche.

Il Colacevich si era indirizzato agli studi astronomici in giovanissima età, perchè già nel 1926, appena ventenne e non ancora laureato, aveva chiesto e ottenuto un posto di assistente volontario presso l'Osservatorio astrofisico di Arcetri (Firenze). Può dirsi che da quell'epoca e fino alla sua nomina a direttore dell'Osservatorio astronomico di Napoli (Capodimonte) il Colacevich non si sia mai distaccato dal centro di studi dove si era formata la sua personalità scientifica, se si eccettuino due non lunghi periodi di assenza: quello in cui fu osservatore e direttore alla Stazione astronomica di Carloforte (dove si attua il contributo dell'Italia all'intrapresa internazionale per lo studio della poloide terrestre) e l'altro di fecondo studio presso l'Osservatorio di Mt. Hamilton in California e presso altri osservatori americani.

Ad Arcetri insegnò presso l'Istituto di ottica dipendente dall'Università di Firenze e si sviluppò allora in lui quella marcata predilezione per lo studio teorico degli strumenti ottici che caratterizza la produzione scientifica del Colacevich e che sempre si riafferma fino nelle sue più recenti ricerche, quali quelle inerenti alla costruzione del coronografo (costruito nell'officina dell'osservatorio di Arcetri, in collaborazione con quella dell'osservatorio di Napoli) sotto la direzione del Colacevich e del suo amico e maestro Giorgio Abetti.

Le ricerche personali intraprese con tanto fervore dal Colacevich non gli hanno impedito di esercitare una notevole attività come professore. Ciò non può recar meraviglia perchè l'interesse e l'amore per l'insegnamento ben raramente vanno disgiunti nei veri ricercatori dal travaglio intellettuale intorno ad importanti problemi, in quanto che la purissima gioia di cui è apportatrice una idea nuova allo studioso è completata quando egli ha la possibilità di trasfonderla nella mente di uditori disposti ad accoglierla, ad appassionarvisi e a farsene ferventi assertori e tali sono senza dubbio i più eletti tra i giovani allievi. Il Colacevich ha così tenuto in varie epoche e in varie sedi diversi corsi sulle varie branche della fisica pura e applicata, con particolare preferenza, come abbiamo detto, per quelle aventi più stretta attinenza agli svariati problemi che pone l'astronomia moderna. Così, oltre al citato corso nell'Istituto di ottica di Firenze, egli insegnò, all'Università della medesima città, fisica generale e spettroscopia, a Cagliari fisica teorica e fisica superiore e recentemente tenne corsi di astrofisica a Napoli.

Uno sguardo generale alle molte pubblicazioni del Colacevich e la considerazione della sua singolare competenza nella tecnica costruttiva degli strumenti astronomici così complessa e così essenzialmente legata al particolare indirizzo di studi da lui coltivato desta negli estimatori ed a-

mici di Lui l'assoluta certezza, accompagnata dal più doloroso rimpianto, che a grandi risultati nel campo della fisica solare e dell'astrofisica generale Egli sarebbe pervenuto se la sua preziosa attività non fosse stata così immaturamente stroncata da un truce destino.

Vada alla desolata Famiglia di Lui l'espressione del più vivo cordoglio dei colleghi dell'Accademia ».

La Commissione Galli, Miranda e Tolotti riferisce sulla nota del dott. Franco MAZZARELLA, *Estensione della analogia di Mohr alle travi sottili caricate assialmente*, proponendone l'inserzione nel Rendiconto.

Uguale proposta di accoglimento per la stampa nello stesso periodico avanza la Commissione Bakunin, Giordani e Panizzi, riferendo sulle note dei dott. JANNELLI Liliana, GIORDANO ORSINI Paolo e DANIELE Giorgio, *Momento elettrico dell'acido p.aminosalicilico*, e dei dottori NICOLAUS Rodolfo e GIORDANO ORSINI Paolo, *Ricerche nel campo degli indicatori azoici*.

Con tre distinte votazioni l'Accademia accoglie alla unanimità le tre note predette.

Il socio De Lorenzo presenta all'Accademia due sue recenti note pubblicate nei Rendiconti: una, su *Kant e la Geografia fisica*, in cui espone i grandi contributi, portati dal filosofo, nei diversi campi della geografia e dell'astronomia fisica; l'altra, su *I vulcani della Luna*, nella quale descrive lo studio di Kant su tale argomento, dimostrando, come esso sia in armonia con i risultati, oggi acquisiti con i potenti mezzi, di cui dispone attualmente l'astronomia, sebbene in contrasto con l'ipotesi, oggi di moda, sull'origine meteoritica dei crateri lunari; la quale, secondo il De Lorenzo, se può verificarsi in alcuni singoli casi, non si può generalmente applicare a tutte le cavità crateriformi della Luna.

Il socio De Lorenzo, inoltre, richiama l'attenzione dei colleghi sulle osservazioni, che attualmente si fanno, sul cosiddetto *raggio verde* del sole al tramonto; il quale da alcuni fisici è riportato alle diverse lunghezze d'onda dei raggi solari al tramonto. Secondo il De Lorenzo, invece, si tratta di un fenomeno non fisico, ma fisiologico: perchè l'estremo lembo del sole, quando tramonta sull'aperto mare, se è intensamente rosso, appena sparisce, fa apparire al suo posto una rapida luminosità verde, e, se è giallo, una luminosità azzurra. Così anche avviene, se si fissa intensamente una qualunque luce od immagine rossa o gialla, e poi la si toglie dalla vista, sì che al suo posto immediatamente appare la stessa immagine, verde od azzurra. Si tratta quindi, evidentemente, dei colori complementari, verde ed azzurro, che si producono sulla retina al posto del rosso e del giallo. Il De Lorenzo ha discusso di tale fenomeno con il collega Giorgio Abetti, dell'osservatorio astrofisico di Arcetri, e, mediante lui, col prof. Ronchi, direttore dell'Istituto di Ottica di Firenze: ed entrambi hanno convenuto che la spiegazione *fisiologica*, da lui patrocinata, sia molto più probabile ed efficiente della *fisica*.



Il socio Colamonico offre in omaggio all'Accademia una sua recente nota sopra *I programmi di Geografia per le scuole secondarie e le proposte della Consulta Didattica*, e ne discorre. — Il presidente ringrazia.

Il socio Malquori presenta una nota del dott. Riccardo SERSALE dal titolo: *Esame microscopico di refrattari cromo-magnesiaci in sezione sottile e in sezione lucida*. Il presidente incarica di riferire su questo lavoro la Commissione Malquori, D'Erasmus, Scherillo.

Il socio D'Erasmus presenta due note: una del prof. Antonio LAZZARI dal titolo: *Nuova ipotesi per una interpretazione strutturale della Sicilia*, e un'altra del dott. Vincenzo MINIERI, *Osservazioni geochimiche sulle arenarie glauconitiche di Punta Lagno nella Penisola di Sorrento*. Vengono incaricate di riferire su queste due note le Commissioni rispettivamente composte dai soci D'Erasmus, De Lorenzo e Colamonico, e dai soci D'Erasmus, De Lorenzo e Scherillo.

Il socio Galli presenta una nota del dott. Michele PAGANO, *Contributo al calcolo delle volte a vela e delle volte di traslazione*, una del prof. Vincenzo FRANCIOSI sopra *Il carico di punta critico in regime elastoplastico* e una dei dott. Aldo RAITHEL e Aldo AMBROSANIO *Sulla determinazione delle sollecitazioni massime nei sistemi ad alto grado di iperstaticità*. Sulle tre note predette è incaricata di riferire la Commissione Galli, Miranda e Tolotti.

Il socio Giordani presenta una nota del dott. Giuseppe PARRAVANO dal titolo: *Formazione di atomi e radicali liberi durante la corrosione dei metalli*. Viene incaricata di riferire su di essa la Commissione Giordani, Bakunin e Malquori.

Il socio Tolotti presenta una nota del dott. Luigi SALVADORI dal titolo: *Un'osservazione su di un criterio di stabilità del Routh*. Il presidente incarica della relativa relazione i soci Tolotti, Nobile e Miranda.

Constatata la validità dell'adunanza, secondo le norme sancite dall'art. 11 dello Statuto sociale, per la votazione a cariche sociali, il presidente invita i soci a procedere, secondo l'ordine del giorno, alla elezione del vice-presidente per l'anno 1954.

Il segretario legge gli articoli dello Statuto e del Regolamento relativi a tale votazione e distribuisce le schede ai soci ordinari residenti. La votazione, fatta a scrutinio segreto, dà il risultato seguente:

Soci ordinari presenti e votanti 12:

Diamare Vincenzo, voti 12;

Scheda bianca, 1

Il presidente proclama eletto vice-presidente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche per l'anno 1954 il socio Vincenzo Diamare, avvertendo che secondo l'art. 14 dello Statuto il risultato della votazione



sarà comunicato al Ministro della Pubblica Istruzione per l'approvazione del Capo dello Stato.

*Processo verbale dell'adunanza del dì 5 dicembre 1953.*

Sono presenti il vice-presidente Colamonico, i soci ordinari residenti, Bakunin, Carrelli, De Lorenzo, D'Erasmus (segretario), Diamare, Galli, Giordani, Imbò, Malquori, Nobile, Salfi, Scherillo, Spampinato, il socio ordinario non residente Armellini ed i corrispondenti Colucci ed Orrù.

Il segretario dà lettura del processo verbale dell'adunanza 7 novembre, che è approvato.

Il presidente dà quindi la parola al prof. Tito Nicolini, che legge la *Commemorazione del socio corrispondente Attilio Colacevich*, alla quale assistono la vedova ed i figli, oltre ad alcuni amici ed assistenti dello scomparso. La necrologia viene accolta per l'inserzione nel Rendiconto, insieme col ritratto e con l'elenco delle pubblicazioni.

Il socio Colamonico presenta, ed offre in omaggio all'Accademia, la recente pubblicazione su *I porti della Sardegna*, dei proff. Alberto MORI e Benito SPANO, che costituisce il VI volume delle Memorie di Geografia economica, edite sotto la sua direzione. — L'Accademia ringrazia.

Con distinte votazioni l'Accademia accoglie all'unanimità, conformemente al parere espresso dalle Commissioni nominate nella precedente adunanza, le note seguenti, tutte destinate alla stampa nel Rendiconto: 1) Riccardo SERSALE, *Esame microscopico di refrattari cromo-magnesiaci in sezione sottile e in sezione lucida* (presentata dal socio Malquori); 2) Antonio LAZZARI, *Nuova ipotesi per una interpretazione strutturale della Sicilia* (presentata dal socio D'Erasmus); 3) Vincenzo MINIERI, *Osservazioni geochimiche sulle arenarie glauconitiche di Punta Lagno nella penisola di Sorrento* (presentata dal socio D'Erasmus); 4) Michele PAGANO, *Contributo al calcolo delle volte a vela e delle volte di traslazione* (presentata dal socio Galli); 5) Vincenzo FRANCIOSI, *Il carico di punta critico in regime elastoplastico* (presentata dal socio Galli); 6) Aldo RAITHEL e Aldo AMBROSANO, *Sulla determinazione delle sollecitazioni massime nei sistemi ad alto grado di iperstaticità* (presentata dal socio Galli); 7) Giuseppe PARRAVANO, *Formazione di atomi e radicali liberi durante la corrosione dei metalli* (presentata dal socio Giordani); 8) Luigi SALVADORI, *Un'osservazione su di un criterio di stabilità del Routh* (presentata dal socio Tolotti).

Il socio DE LORENZO presenta, per il Rendiconto, una sua nota *Sulla intelligenza degli animali*.

Il socio Malquori presenta una nota del dott. Riccardo SERSALE dal titolo *Indagini sul comportamento termico delle rocce calcaree*. — Il presidente incarica di riferire su di essa la Commissione composta dai soci Malquori, Scherillo e D'Erasmus.

Il socio Galli presenta una nota del prof. Vincenzo FRANCIOSI dal titolo: *Il principio di equivalenza nelle strutture monodimensionali soggette a distorsioni concentrate*. Viene incaricata di riferire su di essa la Commissione Galli, Miranda e Tolotti.

Il socio Spampinato presenta due sue note: una *Sulle singolarità degli zeri di una funzione supercomplessa*, e l'altra dal titolo *Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice  $n$  dell' $S_r$  proiettivo complesso*, Nota XI. Lo stesso socio presenta inoltre, per il Rendiconto, una nota del dott. Pio BALSIMELLI, *Studio di una trasformazione birazionale dell' $S_5$  complesso determinata da una trasformazione quadratica biduale*, ed una del dott. Angelo FADINI, *Studio di una trasformazione Cremoniana dell' $S_8$  dedotta da una trasformazione quadratica dell' $S_8$  triduale avente i tre punti eccezionali coincidenti*. Per queste due ultime note è incaricata di riferire la Commissione composta dai soci Spampinato, Miranda e Caccioppoli.

Il socio Colamonico presenta, per lo stesso periodico, una nota del dott. Cristofaro MENNELLA, *Andamento annuale medio e andamento reale della pioggia a Napoli (Capodimonte)*. Riferirà su di essa, in una prossima adunanza, la Commissione Colamonico, Imbò e D'Erasmus.



# I N D I C E

G. D'ERASMO — Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche durante l'anno 1952. . . . .	pag. 3
Concorso al premio biennale accademico per gli anni 1953-1954. . . . .	» 10
G. DE LORENZO — Scienza d'Occidente e Sapienza d'Oriente. . . . .	» 11
P. VITTOZZI — Radiazione solare diretta, globale e diffusa a Napoli, in occasione dell'eclisse solare del 25 febbraio 1952. . . . .	» 20
L. CASERTANO — Misure di luminosità del cielo effettuate all'Osservatorio Vesuviano durante l'eclisse solare del 25-2-1952. . . . .	» 38
L. ACCARDI — Misure di campo elettrico atmosferico eseguite in occasione dell'eclisse parziale di sole del 25-2-1952. . . . .	» 49
L. CASERTANO — Il grado di polarizzazione del cielo misurato all'Osservatorio Vesuviano durante l'eclisse solare del 25-2-1952 . . . . .	» 53
N. SPAMPINATO — Varietà determinata da una coppia ordinata di ipersuperficie dell' $S_r$ complesso . . . . .	» 58
L. SALVADORI — Sulla stabilità dei moti merostatici di particolari sistemi anonomi . . . . .	» 66
G. DE LORENZO — Kant e la Geografia fisica . . . . .	» 79
T. RENZULLI — Le sollecitazioni di origine termica di un ponte Maillart . . . . .	» 89
U. PIERANTONI — Osservazioni e considerazioni sui recenti studi di simbiologia sperimentale . . . . .	» 102
A. LAZZARI — Primi risultati dell'indagine geofisica con il metodo sismico a riflessione nella Piana di Catania. . . . .	» 108
V. FRANCIOSI — Considerazioni sugli archi tipo Boussiron-La Vallette. . . . .	» 113
E. GUERRIERI — Abbondanza e deficienza di pioggia dal 1949 al 1951. Temperature straordinarie nell'estate del 1952 . . . . .	» 118
R. NICOLAUS e P. GIORDANO ORSINI — Ricerche nel campo degli indicatori azoici. . . . .	» 127
N. SPAMPINATO — Le falde t-dimensionali analitiche, algebriche ed unirazionali di un $S_r$ supercomplesso . . . . .	» 147
L. JANNELLI, P. GIORDANO ORSINI e G. DANIELE — Momento elettrico dell'acido p-aminosalicilico . . . . .	» 153
F. MAZZARELLA — Estensione della analogia di Mohr alle travi sottili caricate assialmente . . . . .	» 161
G. DE LORENZO — I vulcani della Luna. . . . .	» 165
R. SERSALE — Esame microscopico di refrattari cromo-magnesiaci, in sezione sottile e in sezione lucida (con 2 tavole). . . . .	» 174
V. FRANCIOSI — Il carico di punta critico in regime elastoplastico. . . . .	» 177
M. PAGANO — Contributo al calcolo delle volte a vela e delle volte di traslazione. . . . .	» 186
A. RAITHEL e A. AMBROSANO — Sulla determinazione delle sollecitazioni massime nei sistemi ad alto grado di iperstaticità. . . . .	» 195



V. DIAMARE — Ricerche istofisiologiche e morfologiche e annotazioni storiche e critiche <i>Sunto della memoria inserita nel volume in corso degli Atti</i> .	pag. 206
G. DE LORENZO — Sull'intelligenza degli animali.	» 207
A. LAZZARI — Nuova ipotesi per una interpretazione strutturale della Sicilia.	» 230
R. SERSALE — Indagini sul comportamento termico delle rocce calcaree (con 2 tavole).	» 245
V. MINIERI — Osservazioni geochimiche sulle arenarie glauconitiche di Punta Lagno nella penisola di Sorrento.	» 257
T. NICOLINI — Commemorazione di Attilio Colacevich.	» 263
L. SALVADORI — Un'osservazione su di un criterio di stabilità del Routh.	» 269
P. BALSIMELLI — Studio di una trasformazione birazionale dell' $S_n$ complesso determinata da una trasformazione quadratica biduale.	» 273
V. FRANCIOSI — Il principio di equivalenza nelle strutture monodimensionali soggette a distorsioni concentrate.	» 279
N. SPAMPINATO — Nozioni introduttive alla teoria delle ipersuperficie algebriche di indice $n$ dell' $S_n$ proiettivo complesso, Nota XI.	» 284
G. PARRAVANO — Formazione di atomi e radicali liberi durante la corrosione dei metalli.	» 293
C. MENNELLA — Andamento annuale medio e andamento reale della pioggia a Napoli (Capodimonte).	» 299
N. SPAMPINATO — Sulle singolarità degli zeri di una funzione supercomplessa.	» 316
A. FADINI — Studio di una trasformazione cremoniana dell' $S_n$ dedotta da una trasformazione quadratica dell' $S_n$ triduale avente i tre punti eccezionali coincidenti.	» 324
Processi verbali delle adunanze dell'anno 1953.	» 335
Indice.	» 347













3 8198 306 685 957

THE UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO

